2

一次元空間中の電子の波動関数は，次のシュレーディンガー方程式を満たす。

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}=H(x)\psi(x,t)$$

ただし t は時間，x は位置，i は虚数単位，$\hbar(=h/2\pi)$ はプランク定数，$H(x)$ はこの系のハミルトニアン（演算子）である。電子波動関数 $\psi(x,t)$ の位置に関するフーリエ変換を $Y(k,t)$ とすると，フーリエ変換及びその逆変換は次式のようになる。

$$\begin{cases}\psi(x,t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}Y(k,t)e^{ikx}dk\\ Y(k,t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x,t)e^{-ikx}dx\end{cases}$$

ただし k は電子の波数を表す。シュレーディンガー方程式に $\psi(x,t)$ のフーリエ変換を代入することにより，$Y(k,t)$ が満たすべき微分方程式が次式のように得られる。

$$i\hbar\frac{\partial Y(k,t)}{\partial t}e^{ikx}=Y(k,t)H(x)e^{ikx}$$

このとき，次の問に答えよ。

(1) 自由空間（ポテンシャルエネルギーが位置によらない）でのハミルトニアンを，電子質量 m，プランク定数 $\hbar(=h/2\pi)$，ポテンシャルエネルギー V，そして位置 x に関する微分を用いて表せ。

(2) 前問で求めたハミルトニアンを上述の $Y(k,t)$ が満たす微分方程式に代入して解き，$Y(k,t)$ の一般解を求めよ。

(3) $Y(k,t)$ が

$$Y(k,t)=C\delta(k-k_0)\exp\left[\frac{t}{i\hbar}\left(\frac{\hbar^2k^2}{2m}\right)\right]$$

のとき，$\psi(x,t)$ を求めよ。ただし C は x,k,t によらない複素定数，$\delta(k-k_0)$ はデルタ関数を表す。

(4) このときの波動関数 $\psi(x,t)$ で表される電子の存在確率は，位置・時間によらず至る所で常に一定であることを示せ。

(5) このときの波動関数 $\psi(x,t)$ の位相速度を求めよ。

(6) 波動関数

$$\psi(x,t)=A\exp\left[i\left\{k_0x-\omega(k_0)t\right\}\right]$$

で表される粒子の速度は群速度 $v_g=d\omega(k_0)/dk_0$ で与えられる。問(3)で得られた波動関数 $\psi(x,t)$ によって表される電子の群速度を求めよ。
ただし $\omega(k_0)$ をそのままにせず具体的に書くこと。