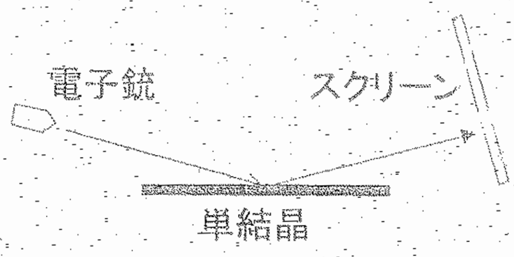
電気物性基礎論試験問題

2004 年 2 月 5 日（木）

[1] 次の問いに答えよ。

(1) 右図は反射高速電子線回折（RHEED）と呼ばれる実験の模式図である。電子銃から放出された電子が単結晶の格子で散乱され，スクリーンに到達する。このとき，スクリーンに投影された像は，結晶の格子定数 d (m)を反映する。その理由を，以下の用語を用いて説明せよ。ただし，電子は単結晶表面にほぼ平行に入射されるものとし，また単結晶は一辺 d (m)の立方体の頂点に格子があるような単純立方格子とする。



用語：電子の二重性（粒子性と波動性），回折，ブラッグの反射条件

(2) 光において，その角振動数ωが大きくなるとエネルギーが大きくなることを，事例（現象もしくは実験）をあげて簡単に説明せよ。

[2] 無限に深い 1 次元の井戸型ポテンシャル

$$V(x)=\begin{cases} 0 & (0 \le x \le 2L) \\ +\infty & (x<0,\ x>2L) \end{cases}$$

の中を運動する質量 m の粒子を考える。

ただし，波動関数を$\phi(x)$，エネルギーをε（$\varepsilon>0$）とする。また，粒子は定常状態にあり，シュレーディンガー方程式は時間を含まない形でよい。

(1) $x=0$ および $x=2L$ において，波動関数 $\phi(x)$ が満たすべき境界条件を示せ。

(2) 井戸の内部（$0 \le x \le 2L$）において，エネルギー ε が量子化されていることを示せ。

(3) 粒子の位置 x の期待値〈x〉が井戸の中央（$x=L$）となることを示せ。

[3] 原点からの距離 x に比例する力 $-kx$（k：弾性定数）によって x 方向に単振動している質量 m の粒子（一次元調和振動子）について，以下の問いに答えよ。

(1) この粒子の波動関数を$\varphi_n(x)$，エネルギーを E_n とする。時間に依存しないシュレーディンガー方程式を示せ。

(2) 昇降演算子を

$$a^*=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x-\frac{i}{m\omega}p_x\right), \qquad a=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x+\frac{i}{m\omega}p_x\right)$$

$\frac{p_x^2}{m^2\omega^2} = a^* a - \frac{m\omega}{2\hbar}x^2$

とする。ただし，$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$ は角振動数，$p_x=-i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ は運動量である。a^*, a を用いて x および p_xを表せ。

(3) ハミルトニアンを書き，これに(2)で得られた結果を代入して，a^*a および aa^*を用いたハミルトニアンの表現を求めよ。

(4) 昇降演算子について次の関係が成り立つ。

$$a^*\varphi_n(x)=\sqrt{n+1}\,\varphi_{n+1}(x), \qquad a\,\varphi_n(x)=\sqrt{n}\,\varphi_{n-1}(x)$$

$$\text{ただし，}\quad \langle n|m\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_n(x)\varphi_m(x)\,\mathrm{d}x=\delta_{nm} \qquad (n, m=0, 1, 2, 3, \cdots)$$

これと(3)の結果を用いて E_nを求めよ。

(5) ポテンシャルエネルギー $V(=m\omega^2x^2/2)$の期待値〈V〉を求めよ。