3

x 方向の任意の波動関数$\Phi(x)$, $\Psi(x)$を考える。$(\Psi, \mathbf{A}\Phi)=(\mathbf{A}\Psi, \Phi)$が成り立つ演算子 $\mathbf{A}$ をエルミート演算子と呼ぶ。以下の問に答えよ。ただし，$\Phi(x)$, $\Psi(x)$の値は $x=\pm\infty$で零とする。

(1) 運動量演算子 $\mathbf{p}_x$ を，微分記号を用いて表せ。

(2) エルミート演算子に対応する固有値は実数となることを証明せよ。

(3) 運動量演算子がエルミート演算子であることを証明せよ。

(4) 位置の演算子 $\mathbf{x}$ と運動量演算子 $\mathbf{p}_x$ の交換関係$[\mathbf{x}, \mathbf{p}_x]=\mathbf{x}\mathbf{p}_x-\mathbf{p}_x\mathbf{x}$ を計算せよ。また，この2者の交換関係の物理的意味を簡単に述べよ。

4

x軸上で原点からの力$-kx$を受けて単振動している質量mの粒子を考える（角振動数 $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$）。$x$ 方向の運動量を p_x とする。この粒子のシュレーディンガー方程式に対する固有関数を $X_n(x)$ とすると，エネルギー固有値は $\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$ である。以下の問に答えよ。

(1)昇降演算子を

$$a^*=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x-\frac{i}{m\omega}p_x\right), \quad a=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x+\frac{i}{m\omega}p_x\right)$$

とすると，次の関係が得られる。

$$a^*X_n(x)=\sqrt{n+1}\,X_{n+1}(x), \quad aX_n(x)=\sqrt{n}\,X_{n-1}(x)$$

$$\text{ただし，}\quad \langle n|m\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}X_n(x)X_m(x)\,\mathrm{d}x=\delta_{nm}$$

演算子 a^*, a を用いて x を表せ。

(2) (1)の結果を用いて x および x^2 の期待値 $\overline{x}$ および $\overline{x^2}$ を求めよ。

(3) ポテンシャルエネルギーの期待値 $\overline{V}=\frac{1}{2}\overline{m\omega^2x^2}$ を求めよ。また$\overline{V}$を粒子エネルギーεを用いて表せ。

(4) 右図の実線 A は$|X_n(x)|^2$を $n=6$ の場合について図示したものである。古典的単振動の振幅を C とする。$|X_n(x)|^2$ は物理的に何を表しているか。また，この図では，大まかな形として，破線 B で示すように中心部で小さく，端に行くほど大きくなる傾向が見られる。これは古典的単振動のどのような振る舞いと関係していると考えられるか。