平成１５年度　名古屋大学大学院工学研究科 博士課程（前期課程）
電気工学・電子工学及び電子情報学専攻

入学試験問題

基　　　　礎

(平成１４年８月２７日（火）１３:３０～１６:３０)

注　　意

１．６問中４問を選んで答えよ。

２．解答は問題ごとに別の答案用紙に書き、それぞれ問題番号、受験番号を上端に記入せよ。氏名は記入してはならない。なお、草案用紙が１枚ある。解答が用紙の裏面にまわる場合は、答案用紙下部にその旨明示すること。又、上部横線に相当する位置以下に書くこと。

３．問題用紙、答案用紙、草案用紙はすべて持ち出してはならない。

４．計算機類は使用してはならない。

$\boxed{1}$

次の積分を求めよ。ただし，$a, b, c > 0$ とする。

(1) $x = ar\cos\varphi, y = br\sin\varphi$ の変数変換を用いて，$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq R^2 (x \geq 0, y \geq 0)$ の範囲で，$f(x,y) = e^{-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ を積分せよ。

(2) $\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{a^2}} dx \int_0^\infty e^{-\frac{y^2}{b^2}} dy = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dxdy$ の関係と (1) の結果を用いて $f(x) = e^{-\frac{x^2}{a^2}}$ の積分

$$\int_0^\infty f(x) dx$$

を求めよ。

(3) $(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$ の範囲で，$f(x,y,z) = e^{-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}$ の積分

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y,z) dxdydz$$

を求めよ。

(4) 楕円体 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ の内部で，$f(x,y,z) = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$ を積分せよ。

$\boxed{2}$

(1) 平面上の, 原点のまわりの角 θ の回転で, 方向が不変なベクトルは, 零ベクトル以外に存在しないことを示せ。ただし, $\theta \neq (2\pi$ の整数倍$)$ とする。

(2) $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ を複素行列ととらえて対角化せよ。つまり, $P^{-1}AP$ が対角行列となるような複素行列 P を求めよ。

$\boxed{3}$

$y(x)$に関する微分方程式の初期値問題

$$y'' + 2ay' + (a^2 + \omega^2)y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -a$$

（ただし，$a > 0$，$\omega > 0$とする）について以下の問に答えよ。

（1） 初期値問題を解け。

（2） 初期値問題の解$y(x)$を$x \geq 0$の区間で図示せよ。

（3） $y^2(x)$を$x \geq 0$の区間で図示せよ。

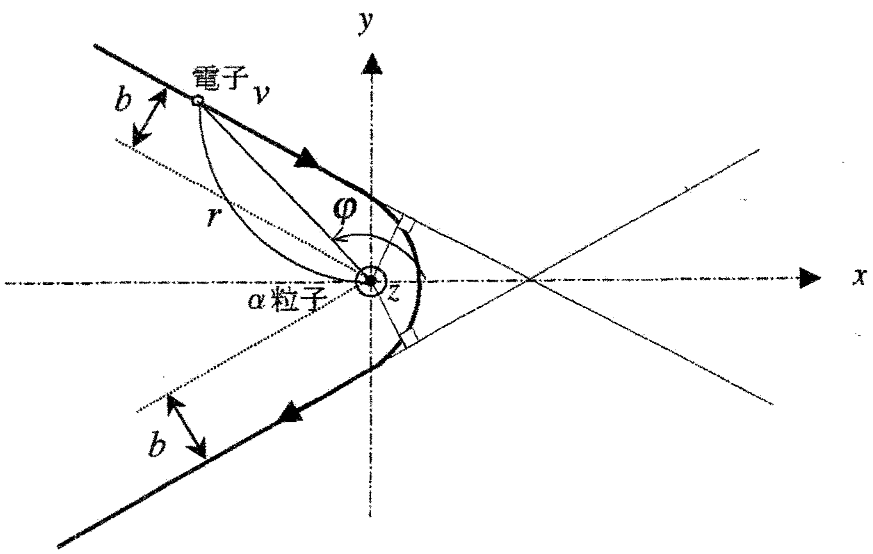
（4） $I_n = \int_{\frac{n\pi}{\omega}}^{\frac{(n+1)\pi}{\omega}} y^2(x)dx$ （$n = 0, 1, 2, \cdots$）とするとき$\dfrac{I_{n+1}}{I_n}$を求めよ。

（5） $\dfrac{\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} y^2(x)dx}{\int_0^{\infty} y^2(x)dx}$を求めよ。

4

中心力を受ける質点の運動では，力の中心から $\boldsymbol{r}$ の位置にあり，運動量 $\boldsymbol{p}$ を持つ質点の角運動量 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ は保存される。

今，図のように，静止している α 粒子（ヘリウムの原子核）に向かって電子が遠方から飛来し，方向を変えて飛び去った。電子と粒子が最も近付いたときの距離 r_0 を以下の設問に従って求めよ。ただし，α 粒子は質量が電子に比べて十分に大きいので空間に固定されているとし，各粒子の大きさと万有引力は無視できるものとしてよい。また，電子の質量は m，素電荷は $e\,(>0)$，真空の誘電率は ε_0 とする。



1） 電子の運動は，初速度と α 粒子とを含む平面内に束縛される。この平面上に，α 粒子の中心を原点として，x，y 軸を，紙面の裏から表へ z 軸をとり，図のように r，φ をとる時，この平面上の任意の点$(r,\ \varphi)$にある電子について，速度 $\boldsymbol{v}$ の x，y 成分 v_x，v_y と，角運動量の大きさ $L=|\boldsymbol{L}|$ を r，φ に関する平面極座標系を用いて表せ。

2） この電子の全エネルギー E_0（運動エネルギーとクーロンポテンシャルエネルギーの和）を上と同じ平面極座標系で表せ。

3） 電子は十分遠方にある時，速さ v_0 で直線軌道上を運動している。その軌道の延長線上に α 粒子の中心から下ろした垂線の長さを b として，角運動量とエネルギーの保存則から，電子の速度 $\boldsymbol{v}$ の φ 方向成分 v_φ，および r 方向成分 v_r を r の関数として表せ。

4） 以上のことから，電子の α 粒子への最近接距離 r_0 を求めよ。

5

半径aの球Aの内部に電荷Qが一様に分布している。また，球Aを包むように半径bの球Bがあり，球Bと球Aの間には電荷$-Q$が一様に分布している。これについて以下の設問に答えよ。ここで空間の誘電率はすべてε_0とする。

1）真空中の静電界Eと電荷密度ρの間の関係一般的に表す方程式（積分形）を示せ。また，その方程式の意味する物理的内容を５０字以内で述べよ。

2）図１のように，AとBが同一の中心Oを有する場合を考える。電界を求め，その大きさを中心Oからの距離rの関数としてグラフに示せ。

3）前問２）について，電位をrの関数として定性的にグラフで示すとともに，$r = a$での電位を求めよ。ここで無限遠の電位をゼロとする。

4）図２のように，AとBの中心がδ(>0)だけ離れている。AとBの中心をそれぞれ$x=\delta/2, -\delta/2$とし，x−y平面上において球Bの外側での電位分布を求めよ。ここで，$a \ll b$として近似せよ。

5）前問４）について，$\delta \ll b$の場合は，球Bの外側における電位はδQに比例することを示せ。

6）設問４）の場合について，x−y平面上において球Bの外側での電気力線の様子を模式的に描け。

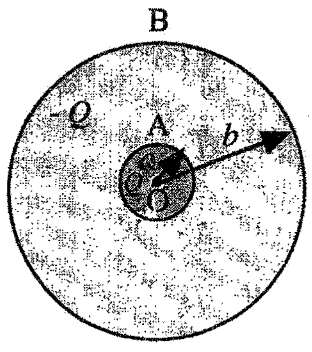


図１

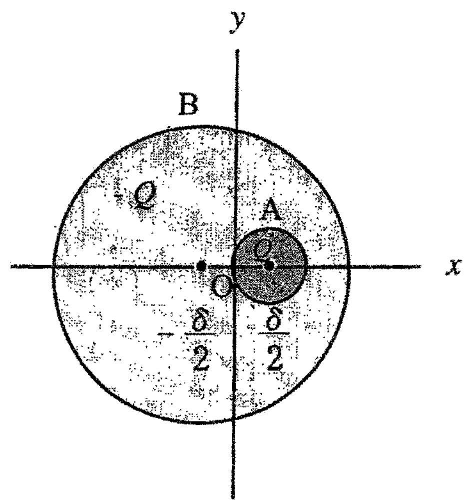


図２

6

図1に示すように，完全導体とみなせる無限の広がりをもつ金属平板が真空中におかれている。座標系を図に示したように定義する。真空中を z 軸に沿って金属板に向かって入射する角周波数 ω，波数 k の平面電磁波の電界が

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \cos(\omega t - kz), \tag{1}$$

$$\boldsymbol{E}_0 = (E_0, 0, 0) \tag{2}$$

と書き表される時，以下の問いに答えよ。ただし，真空の誘電率を ε_0，透磁率を μ_0 とする。

1) この電磁波の波長および位相速度をそれぞれ答えよ。

2) この入射波の磁界を計算し，(1) 式および (2) 式にならって書き表せ。

3) 金属板に到達した電磁波は，金属板内に進入することなく，金属板表面で反射する。その理由を簡単に説明せよ。

4) 反射波の電界を (1) 式および (2) 式にならって書き表せ。

5) 金属板の前面に生じる定在波の電界の式を書け。また，電界の変化の様子を，縦軸を電界，横軸を z 軸として図示せよ。

6) 金属板の前面に生じる定在波の磁界の式を書け。また，磁界の変化の様子を，縦軸を磁界，横軸を z 軸として図示せよ。

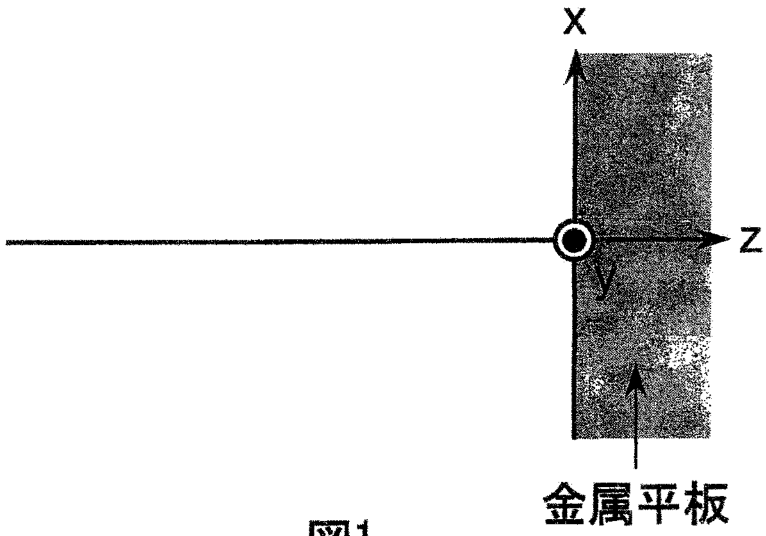


図1

平成１５年度　名古屋大学大学院工学研究科 博士課程（前期課程）
電気工学・電子工学及び電子情報学専攻

入学試験問題

専　　　　門

(平成１４年８月２８日（水）９:００〜１２:００)

注　　意

１．８問中４問を選んで答えよ。

２．解答は問題ごとに別の答案用紙に書き、それぞれ問題番号、受験番号を上端に記入せよ。氏名は記入してはならない。なお、草案用紙が１枚ある。解答が用紙の裏面にまわる場合は、答案用紙下部にその旨明示すること。又、上部横線に相当する位置以下に書くこと。

３．問題用紙、答案用紙、草案用紙はすべて持ち出してはならない。

４．計算機類は使用してはならない。

1

図の回路において，高周波電源(内部インピーダンス $Z_0(\neq 0)$，角周波数ω_0)からの電力が無損失伝送線路(特性インピーダンス Z_0)を通して負荷に接続されている。また，負荷は誘導性負荷(等価インダクタンスL, 等価抵抗R)であり, LとRの間には$\omega_0 L=R$の関係がある。さらに，負荷と伝送線路との整合を取るために，b-b'端子にはコンデンサが挿入されている。以下の設問に答えよ。

1）あるコンデンサ容量Cにおいて整合が得られ，負荷からの反射電力P_Rが 0 となった。

a) コンデンサ容量Cおよび等価抵抗RをZ_0，ω_0を用いてあらわせ。

b) 入射電力がP_Fであるときの入射波の電圧V_Fを，P_FおよびZ_0を用いてあらわせ。

2）1）においてコンデンサが短絡故障したため反射電力P_Rが発生した。高周波電源が許容できる反射電力の最大値がP_{Rmax}であるとき，$P_R < P_{Rmax}$の条件を満たすためのP_Fの最大値P_{Fmax}を求めたい。

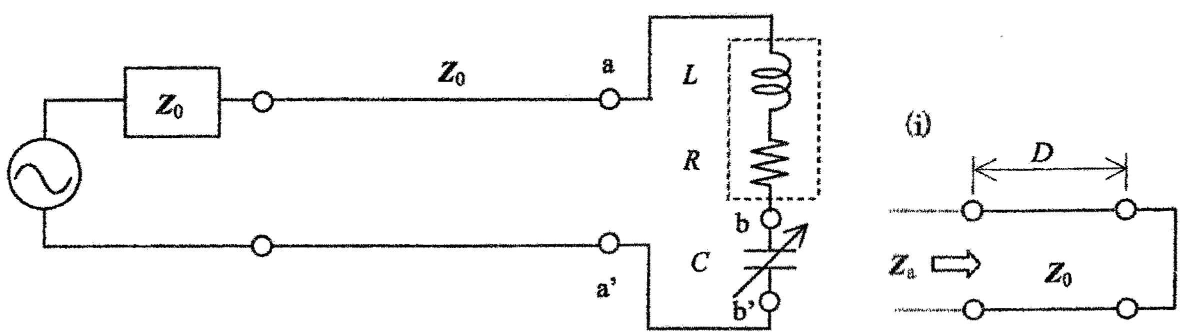
a) 一般に，特性インピーダンスZ_0の伝送線路にインピーダンスZ_Lをもつ負荷が接続されているとき，接続端における電圧反射係数Γは$\Gamma=(Z_L-Z_0)/(Z_L+Z_0)$であらわされる。これをもとに，本問の a-a'端における電圧反射係数Γの絶対値$|\Gamma|$の値を求めよ。

b) P_{Rmax}を用いてP_{Fmax}を求めよ。

3）2）で故障したコンデンサを，伝送線路を利用したリアクタンス素子に置き換えて回路の整合を取ることを考える。高周波電源と負荷をつなぐ伝送線路と同一の特性を持つ伝送線路を新たに用意し，その負荷端を短絡する(図中(i))。その時，伝送線路の他端から伝送線路側をみたインピーダンスZ_aは$Z_a=jZ_0\tan\theta$であらわされる。ただし，$\theta=\beta D$であり，Dは伝送線路の長さ，βは位相定数である。

a) 伝送線路長さに対するリアクタンス値の変化を図示せよ。

b) このリアクタンス素子を故障したコンデンサに置き換えるとき，回路の整合が得られる最も短い伝送線路の長さD_{Rmin}をβを用いて求めよ。



2

極数 $p=6$ の巻線型三相誘導電動機が、周波数 $f=50\text{Hz}$，線間電圧 (実効値)$V_1=200\text{V}$ の三相交流電圧源に接続されている。

誘導電動機を定格負荷で運転したところ，回転数 n は 950rpm，一次入力電力 P_1 は 12kW であり，力率 $\cos\theta$ は $1/\sqrt{3}$ であった。以下の設問に答えよ。

ただし，一次巻線および二次巻線はいずれも Y 結線されている。一次巻線 1 相の抵抗およびリアクタンスを r_1 および x_1，二次巻線 1 相の抵抗を r_2(一次側換算値:r_2')，電動機停止中における二次巻線 1 相のリアクタンスを x_2(一次側換算値:x_2')，励磁アドミタンスを Y_0 とする。

(1) この誘導電動機における同期速度 n_s を f と p とを用いて示し，n_s の値を求めよ。

(2) 一次電流 I_1 を P_1，V_1 および $\cos\theta$ を用いて表せ。得られた式を用いて，I_1 の値を求めよ。

(3) 誘導電動機の 1 相分の等価回路を描け。ただし，すべり s を用いることによって，銅損を代表する二次抵抗と機械的出力を代表する負荷抵抗とに分けて表示せよ。さらに，この分離を利用して，二次入力電力 P_2 と機械的出力 P_{out} との関係をすべり s を用いて表せ。

(4) すべり s を，n_s および n を用いて表し，定格運転時の s の値を求めよ。

(5) 一次巻線 1 相の抵抗 r_1 の値は 0.1Ω であり，鉄損 P_i は 0.92kW であった。定格運転時の機械的出力 P_{out} の値を求めよ。次に，P_{out} とトルク T との間に成り立つ関係を示し，トルク T の値を求めよ。

上記の誘導電動機においては，二次巻線はスリップリングを通じて，Y 結線された外部抵抗に接続されている。定格負荷のまま，各相の外部抵抗 R を，0Ω から $2r_2$ に増加させた。次の設問に答えよ。

(6) 外部抵抗値の増加後における回転数 n' および効率 η' の値を求めよ。ただし，負荷のトルクは回転数に対して一定であるとし，また，誘導機において機械損はないのものとする。

3

下図の CR 結合増幅回路について次の問に答えよ。

(1) 中域周波数においては，結合コンデンサ C_{C0}, C_{C1}, C_{C2} およびバイパスコンデンサ C_{E1}, C_{E2} のインピーダンスは十分小さく，無視できるものとする。このときの小信号等価回路を h パラメータを用いて図示せよ。ただし，h パラメータのうち h_{re}, h_{oe} は十分小さいとして省略し，トランジスタ Tr_1 および Tr_2 の h パラメータをそれぞれ h_{ie1}, h_{fe1} および h_{ie2}, h_{fe2} とせよ。

なお，エミッタ接地回路の入力電圧を v_i，入力電流を i_i，出力電圧を v_o，出力電流を i_o としたとき，4つの h パラメータは次式で定義される。

$$\begin{pmatrix} v_i \\ i_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{ie} & h_{re} \\ h_{fe} & h_{oe} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_i \\ v_o \end{pmatrix}$$

(2) (1) で求めた小信号等価回路を利用して電圧増幅度 A_v $(= v_2/v_1)$ を求めよ。

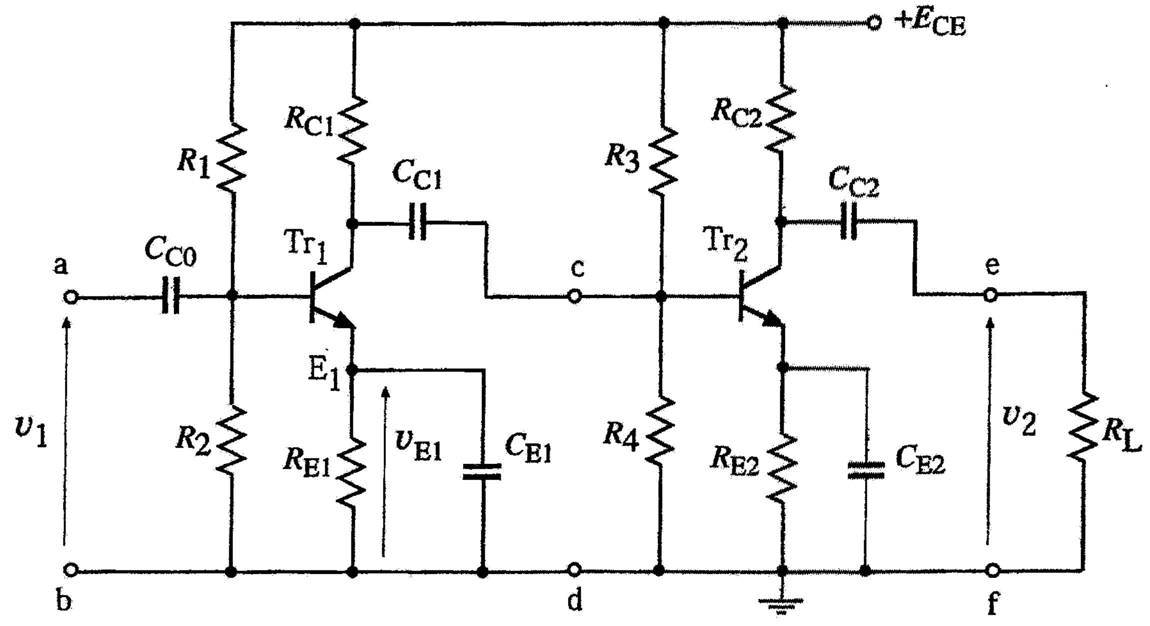
(3) この回路の入力抵抗 R_i を (1) で求めた小信号等価回路を利用して求めよ。

(4) 出力端子の一端 "e" とトランジスタ Tr_1 のエミッタ "E_1" の間に抵抗 R_F を挿入するとともに，コンデンサ C_{E1} を取り去って負帰還を施した。このときの中域周波数における電圧増幅度 A_{vf} を (2) で求めた A_v を用いて表せ。ただし，負帰還を施したときの E_1 の信号電圧 v_{E1} は次式

$$v_{E1} = \frac{R_{E1} v_2}{R_{E1} + R_F}$$

で近似できるものとする。

(5) (4) で求めた電圧増幅度 A_{vf} が，h パラメータに依存しなくなるための条件を示せ。



4

一辺の長さがLの二次元の箱に閉じ込められた電子について以下の問いに答えよ。

(1) 二次元系の自由電子のシュレディンガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\phi(x,y)=E\phi(x,y) \qquad ①$$

（mは電子の質量，$\hbar = h/2\pi$，hはプランク定数）において波動関数は周期的境界条件

$$\phi(x,y)=\phi(x+L,y)=\phi(x,y+L) \qquad ②$$

を満たすものとする。この方程式は$\phi(x,y)=\phi_1(x)\phi_2(y)$と置くことにより，変数分離法で解くことができる。これにより方程式を解き，エネルギー固有値Eが

$$E=\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2({n_x}^2+{n_y}^2) \qquad ③$$

となることを示せ。ただしn_x，n_yは整数である。

(2) 一辺の長さがLの二次元の箱に非常に多く（単位面積当たりN個）の自由電子が閉じ込められているとする。ただし，電子間のクーロン相互作用は無視する。

(a) エネルギーεより低いエネルギー準位の単位面積あたりの数$G(\varepsilon)$を求めよ。

(b) エネルギー間隔$(\varepsilon, \varepsilon+d\varepsilon)$にあるエネルギー準位の単位面積あたりの数$D(\varepsilon)d\varepsilon$を求めよ。

(c) 温度$T=0\,\mathrm{K}$および$0<T<<\varepsilon_F/k_B$（ε_Fはフェルミエネルギー，k_Bはボルツマン定数）のときのフェルミディラック関数$f(\varepsilon)$および単位面積当たりの電子数のエネルギー分布の概略図を示せ。

5

数直線上の点を１秒ごとに移動する粒子がある。点 i にある粒子が，次の１秒後に点 $i-1$, $i+1$ にある確率をそれぞれ 1/2, 1/2 とする。時刻 0 では粒子は点 3 にいるとして，以下の問いに答えなさい。

1．6 秒後に粒子が点 5 に存在する確率を求めなさい。
2．6 秒後に粒子が 0 以上の点に存在する確率を求めなさい。
3．n 秒後の粒子の位置を表わす確率変数を X_n とする。期待値 $E(X_3)$ と分散 $V(X_3)$ を求めなさい。
4．点 1 または点 5 に達するとそこで粒子は停止すると仮定する。この時，4 秒後に点 1 に粒子が存在する確率を求めなさい。

6

a, b, c ,d の４つの文字がそれぞれ次の表で示す確率で発生する情報源がある。この情報源を符号１（可変長符号）、符号２（等長符号）で符号化するものとする。次の問に答えよ。

文字	発生確率	符号 1	符号 2
a	1/2	0	00
b	1/4	1	01
c	1/8	110	10
d	1/8	111	11

1　符号１と符号２の平均符号長を求めよ。

2　符号１は復号可能な符号では無いことを示せ。

3　この情報源のエントロピーを求めよ。

4　一般に一意に復号可能で、平均符号長が最小となるとき、その符号の平均符号長は情報源のエントロピーと等しいか、長くなる。この情報源の平均符号長が最小になるように符号化せよ。

7

クロックに同期して直列に1ビットずつ到来する入力系列に対して，110を検出するまで0を出力し，検出すれば1を出力，その後1を出力し続ける同期式順序回路を考える。例えば，入力系列 11<u>010</u> では下線の値が入力された時刻に1を出力する。以下の問に答えよ。

(1) 初期状態を S_0，その状態から1を検出した状態を S_1，11を検出した状態を S_2，110を検出した状態を S_3 とする。入力系列 01011101 に対する状態遷移の系列を書け。

(2) この順序回路を Mealy 型で構成するとする。状態 $S_0 \sim S_3$ の遷移図を書け。なお，Mealy 型順序回路とは，出力が状態と入力の両方により決定される順序回路のことをいう。

(3) 状態を表1のように c_0，c_1 でコード化する。現在の状態を c_0，c_1，入力を x とし，次の状態を c_0^{next}，c_1^{next}，出力を z とするとき，表2の状態遷移表の空欄を埋めて，この表を完成させよ（表を解答用紙に書き写して解答すること）。

表 1: 状態のコード化

状態	c_1	c_0
S_0	0	0
S_1	0	1
S_2	1	0
S_3	1	1

表 2: 状態遷移表

c_1	c_0	x	c_1^{next}	c_0^{next}	z
0	0	0			
0	0	1			
0	1	0			
0	1	1			
1	0	0			
1	0	1			
1	1	0			
1	1	1			

(4) c_1^{next} を以下の手順で c_0，c_1，x の論理式で表せ。

(a) 加法標準型で表せ。

(b) 最も簡単な積和型に変形せよ。

$\boxed{8}$

連続時間信号 $x_c(t)$ を周期 T で標本化した離散時間信号 $x[n]$

$$x[n] = x_c(nT),\ n \text{ は整数}$$

から $x_c(t)$ を復元することを考える。

(1) 連続時間信号である周期 T のインパルス列 $p(t)$

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

を $x_c(t)$ に乗じた連続時間信号を次のように $x_s(t)$ と置く。

$$x_s(t) = x_c(t)p(t)$$

このとき，$x_s(t)$ の連続時間フーリエ変換 $X_s(\omega)$ と $x_c(t)$ の連続時間フーリエ変換 $X_c(\omega)$ の関係を求めよ。また，その関係を図解により説明せよ。

[ただし，$p(t)$ の連続時間フーリエ変換は $P(\omega) = \dfrac{2\pi}{T} \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \dfrac{2\pi k}{T}\right)$ で与えられる。]

(2) $X_s(\omega)$ から適切なスペクトル部分を抽出して $x_c(t)$ を復元しようとする場合，$\omega_s/2 < \omega$ （ $\omega_s = 2\pi/T$ ）を満たす ω に対して $X_c(\omega) \neq 0$ であると，どのような不都合が生じるか。(1)の結果に基づいて図解により説明せよ。

(3) $|\omega| \leq \pi/T = \omega_s/2$ に帯域制限されている信号 $x_b(t)$ は周期 T ごとの標本値 $x_b[n]$ を用いて

$$x_b(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_b[n] S_a\left(\frac{\pi(t - nT)}{T}\right),\quad S_a(x) = \frac{\sin x}{x}$$

と表すことができ，$x_b(t)$ は $x_b[n]$ から完全に再構成できることを示せ。