

平成20年度 名古屋大学大学院工学研究科 博士課程（前期課程）
電子情報システム専攻

入学試験問題

基 礎

(平成19年8月28日(火) 13:30～16:30)

注 意

1. 6問中4問を選んで答えよ。
2. 解答は問題ごとに別の答案用紙に書き、それぞれ問題番号、受験番号を上端に記入せよ。氏名は記入してはならない。なお、草稿用紙が1枚ある。解答が用紙の裏面にまわる場合は、答案用紙下部にその旨明示すること。又、上部横線に相当する位置以下に書くこと。
3. 問題用紙、答案用紙、草稿用紙はすべて持ち出してはならない。
4. 計算機類は使用してはならない。
5. 携帯電話は時計としても使用してはならない。電源を切ること。

1. 次の問に答えよ.

$y = \tan^{-1} \sqrt{1-x^2}$ を微分せよ. ただし $-1 < x < 1$ とする.

2. $x > 0$ において次の不等式が成立することを示せ.

$$\frac{x}{1+x} < (x+1) \log(1+x)$$

3. 実数 x を変数とする何回でも微分可能な関数 $f(x)$ を考える. 次の問に答えよ.

1) n を自然数とし,

$$g_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \int_0^x f^{(n)}(t) \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt$$

とおく. ただし, $f'(x), f''(x), f^{(n)}(x)$ はそれぞれ $f(x)$ を 1, 2, n 回微分したものを表す. 数学的帰納法を用いて, $f(x) = g_n(x)$ が成り立つことを示せ.

2) $f(x) = g_n(x)$ であることを利用して, 任意の自然数 n と任意の実数 x に対して,

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k$$

が成り立つことを示せ.

2

1. 行列

$$A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と半径 1 の球体

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \right\}$$

を考える。次の問に答えよ。

- 1) 行列 A の固有値・固有ベクトルの対を全て計算せよ。ただし、固有ベクトルは長さが 1 となるよう正規化すること。
- 2) 行列 A によって定まる一次変換を n 回適用して、球体 B が写される先は

$$A^n B = \left\{ A^n \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in B \right\}$$

である。 $n \rightarrow \infty$ の時、 $A^n B$ が近づく先の図形を xyz 空間中に図示せよ。座標も記すこと。

(次のページに続く)

2. 任意の実数 x に対して次式が成り立つ.

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots$$

これらと同様に, A を 2×2 行列として, 無限級数

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} A^{2k} = I - \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{4!}A^4 - \dots$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} A^{2k+1} = A - \frac{1}{3!}A^3 + \frac{1}{5!}A^5 - \dots$$

が収束するとき, これらをそれぞれ $\cos A, \sin A$ と書くことにする. ただし, I は 2×2 単位行列であり, $A^0 = I$ とする. 以下では λ を実数とし,

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \lambda I + N = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

とする. 次の問に答えよ.

- 1) $\cos N, \sin N$ を求めよ.
- 2) k を 0 以上の整数とするとき, A^k は

$$A^k = \alpha_k I + \beta_k N$$

の形となる. 実数 α_k, β_k を λ, k を用いて表せ.

- 3) $\cos A$ を $\cos \lambda, \sin \lambda$ を用いて表せ.

1. 次の微分方程式を解け.

$$ax \frac{dy}{dx} + by = xy \frac{dy}{dx}$$

2. 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$1) \quad \frac{d^2y}{dx^2} - 4 \frac{dy}{dx} + 4y = xe^{2x}$$

$$2) \quad \frac{dy}{dx} + (\sin x)y = \sin 2x$$

3. 滑らかな曲線 ℓ 上の点 $Q(x, y)$ における接線を考える. 次の問に答えよ. ただし, $dy/dx = p$ とし, p が有限である場合のみ考えればよい.

1) Q における接線の方程式を, p を含む形で求めよ. ただし, 接線上の任意の点の座標を (u, v) とする.

2) 接線と原点の距離を 2 とする. このとき, 次の微分方程式が得られることを示せ.

$$y - px = \pm 2\sqrt{1 + p^2}$$

3) 2) で示した微分方程式を x に関して微分することにより解け.

4

図1に示すような、導体1および2(ともに面積は S)の間を誘電体1および2で満たされている正方形平行平板コンデンサーについて考える。誘電体1および2の誘電率はそれぞれ ϵ_1 および ϵ_2 , 厚さはそれぞれ d_1 および d_2 であり, 誘電体1と2の境界面には面密度 σ の真電荷が一様に存在している。

導体1と2の間に電位差 V_0 を与えた。定常状態において, 以下の問いに答えよ。ただし, 導体間距離は導体の一辺の長さに対して無視できるほど短く($d_1+d_2 \ll \sqrt{S}$), コンデンサーの端における電界の乱れは無視できるものとする。

- 1) 誘電体1および2における電束密度をそれぞれ D_1 および D_2 とする。 D_1 , D_2 および σ との間に成り立つ関係を示せ。
- 2) 導体1からの距離 x における電位を $V(x)$ とする。 $V(x)$ を ϵ_1 , ϵ_2 , d_1 , d_2 , V_0 および σ を用いて表し, $V(x)$ の概略図を示せ。ただし, D_1 および D_2 の向きはともに導体1から2へむかう向き(x 軸正方向)であるとして描け。
- 3) 導体1および2に誘起される電荷 q_1 および q_2 をガウスの定理を使って求めよ。
- 4) このコンデンサーに蓄えられる静電エネルギー U を求めよ。
- 5) 導体1および2に作用するそれぞれの吸引力 f_1 および f_2 を求めよ。ただし, 簡単のため $\sigma=0$ とする。(以下のヒントのいずれかを用いてもよい。ヒント1:エネルギーと力の関係を考えよ。ヒント2:導体表面の電荷に作用する力は, 対向導体表面の電荷の作る電界による。)

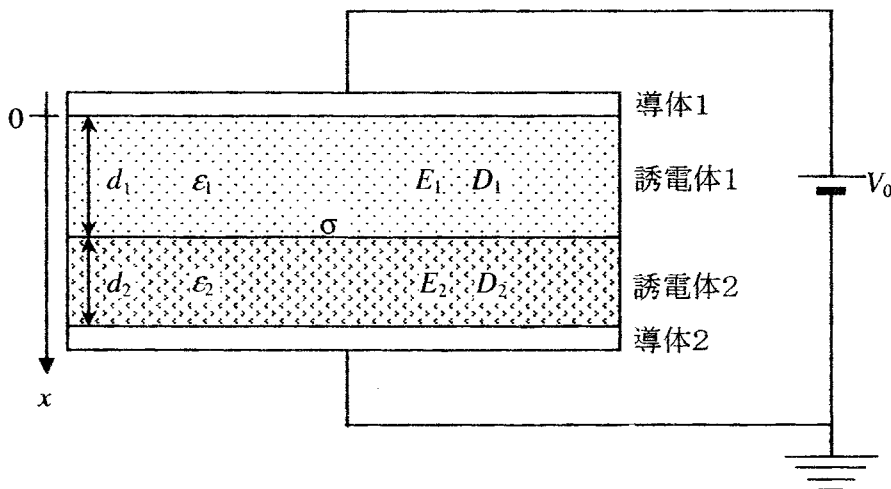


図1

5

図1のように x 軸に沿って置かれた断面積 S の導体に対して、 xy 面内に x 軸から角度 θ だけ傾いた方向に均一な磁界(磁束密度 \mathbf{B})が印加されている。導体の両端に電圧を印加したところ、導体中に電流が流れるとともに導体に力が加わった。電流が定常状態にあるとき、以下の問いに答えよ。

- 1) 導体内を流れる電子(素電荷 $-e$)の平均速度が \mathbf{v} であるとき、磁界によって導体内を流れる1個の電子に加わる平均的な力 \mathbf{F} の x, y, z 成分(F_x, F_y, F_z)を $e, |\mathbf{v}|, |\mathbf{B}|, \theta$ を用いて表せ。また、導体内を流れる電子の数密度(単位体積あたりの電子数)を n とするとき、導体単位長さあたりに存在する電子に加わる力 \mathbf{F}_1 の x, y, z 成分(F_{1x}, F_{1y}, F_{1z})を $e, |\mathbf{v}|, |\mathbf{B}|, \theta, n, S$ を用いて表せ。
- 2) 導体に流れる電流 I の絶対値 $|I|$ を $e, |\mathbf{v}|, n, S$ を用いて表すとともに、1) で求めた力 \mathbf{F}_1 の x, y, z 成分(F_{1x}, F_{1y}, F_{1z})を $|\mathbf{B}|, |I|, \theta$ を用いて表せ。

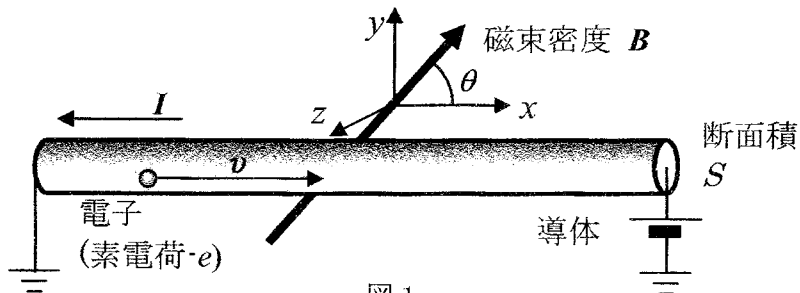


図1

図2のように、透磁率 μ_0 の空間中の xz 平面内に無限長かつ太さが無視できる2本の平行導線 P, Q が距離 $2L$ だけ離れて存在し、 $+z$ 方向に電流 I_1 が流れている。また、同じ xz 平面内には折れ曲がった導線 R があり、電流 I_2 が流れている。このとき以下の問いに答えよ。ただし、 $|I_1| \gg |I_2|$ であり、導線 R により生じる磁界は導線 P および Q による磁界に比べて無視できるものとする。

- 3) 導線 P および Q に流れる電流により生ずる磁界について、 x 軸上の $|x| < L$ の範囲における磁束密度 \mathbf{B} の x, y, z 成分(B_x, B_y, B_z)を x の関数で表わせ。
- 4) 導線 R の bc 間に発生する力 \mathbf{F}_{bc} の x, y, z 成分($F_{bcx}, F_{bcy}, F_{bcz}$)を求めよ。
- 5) 導線 R の ab 間に発生する力 \mathbf{F}_{ab} の x, y, z 成分($F_{abx}, F_{aby}, F_{abz}$)を求めよ。

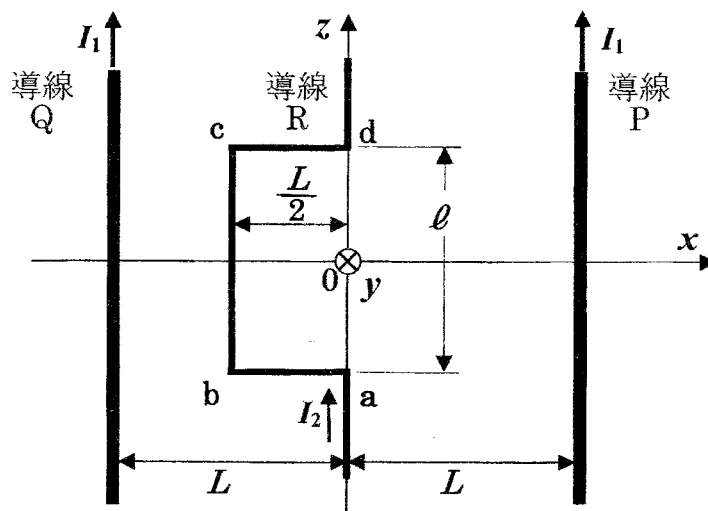


図2

6

雨滴が空気中を落下する場合の運動を考える. 上空のある高さから質量 m の雨滴が初速 0 で落下をはじめ. なお風は吹いておらず雨滴は鉛直下方向に落下する. 重力加速度を g 、時刻を t として以下の問いに答えよ.

- 1) 落下の初期においては、雨滴には速度に比例する抗力が働くともみなしてよい.
 - a) この比例係数を a ($a > 0$) とする. 鉛直方向を z 軸とし上向きを正として、雨滴の運動方程式を z の微分方程式として表せ. ただし、雨滴に働く浮力は無視できるものとする.
 - b) a) の運動方程式を z について次の手順にしたがって解け. まず、特別解を $-\frac{mgt}{a}$ として z の一般解および z 方向の速度 $\frac{dz}{dt}$ を求めよ. 次に初期条件として時刻 $t = 0$ において $z = 0$ 、 $\frac{dz}{dt} = 0$ とした場合、時刻 t における z および $\frac{dz}{dt}$ を求めよ.

- 2) 雨滴の落下速度が増すにつれて、速度の 2 乗に比例する抗力の影響が大きくなる. この比例係数を b ($b > 0$) として雨滴の運動方程式を v ($v = \frac{dz}{dt}$) の微分方程式として表せ. このとき、速度に比例する抗力は無視できるとする. また、雨滴の速度は時間とともに一定値に限りなく近づき、この速度を終端速度という. 終端速度を v_f とすると $\frac{dv_f}{dt} = 0$ となることを用いて終端速度 v_f を求めよ.

- 3) 図 1 に示すように上面の開口部の面積が ab 、深さ c 、質量 M_0 の箱が雨滴を受けながら摩擦の無視できる滑らかな水平面上を移動する場合を考える. 箱に当たる雨滴は終端速度 v_f で落下しているとする. 雨滴の質量はすべて m であるとし、雨滴の密度を ρ 、単位体積あたりの雨滴の個数を N とするとき、時刻 $t = 0$ に初速 V_0 で走り始めた箱の時刻 t における速度 V を求めよ. 走り始めた瞬間には箱に雨滴は入っていないとする. ただし、箱に対する空気及び雨滴の抗力は無視できるものとする. また、箱の縁部や側面に付着したり、はねかえる雨滴の影響も無視できるものとする. 箱の中の水面の表面張力によるふくらみは無視し、水面は水平とする.

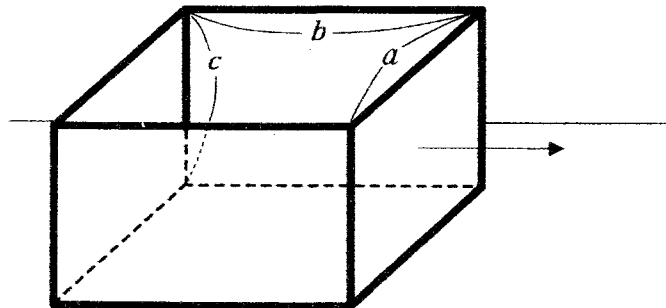


図 1

平成20年度 名古屋大学大学院工学研究科 博士課程（前期課程）
電子情報システム専攻

入学試験問題

専 門

(平成19年8月29日(水) 9:00～12:00)

注 意

1. 8問中4問を選んで答えよ。
2. 解答は問題ごとに別の答案用紙に書き、それぞれ問題番号、受験番号を上端に記入せよ。氏名は記入してはならない。なお、草稿用紙が1枚ある。解答が用紙の裏面にまわる場合は、答案用紙下部にその旨明示すること。又、上部横線に相当する位置以下に書くこと。
3. 問題用紙、答案用紙、草稿用紙はすべて持ち出してはならない。
4. 計算機類は使用してはならない。
5. 携帯電話は時計としても使用してはならない。電源を切ること。

1

図1のような対称三相送電システム（周波数 $f=60\text{Hz}$ ）がある。電力ケーブルの定格電圧 $V_N=275\text{kV}$ ，定格電流 $I_N=1\text{kA}$ ，作用インダクタンス $L_0=0.2\text{mH/km}$ ，作用静電容量 $C_0=0.4\mu\text{F/km}$ ，長さ $l=20\text{km}$ とし，抵抗成分は無視する。また，負荷は対称であり，遅れ力率とする。以下の各問に答えよ。

- (1) 電力ケーブルの定格送電電力 P_N を求めよ。
- (2) 電力ケーブルの線路定数を求め， π 型等価回路（1相分）で表せ。
- (3) 送電端の遮断器 S_1 を閉じ，受電端の遮断器 S_2 を開いた状態において，送電端電圧ベクトル E_S ，受電端電圧ベクトル E_R ，電力ケーブルのインダクタンスを流れる電流ベクトル I_L の関係を図示せよ。また，受電端の電圧の大きさが定格電圧に維持されている場合， I_L の大きさを求めよ。
- (4) S_1 および S_2 を閉じた状態において， E_S ， E_R ， I_L の関係の概略を図示せよ。また，電源は有効電力のみを供給する場合，無効電力の流れについて述べよ。
- (5) 一般には，電力ケーブルは架空送電線よりも短い距離でしか適用されていない。この理由を述べよ。

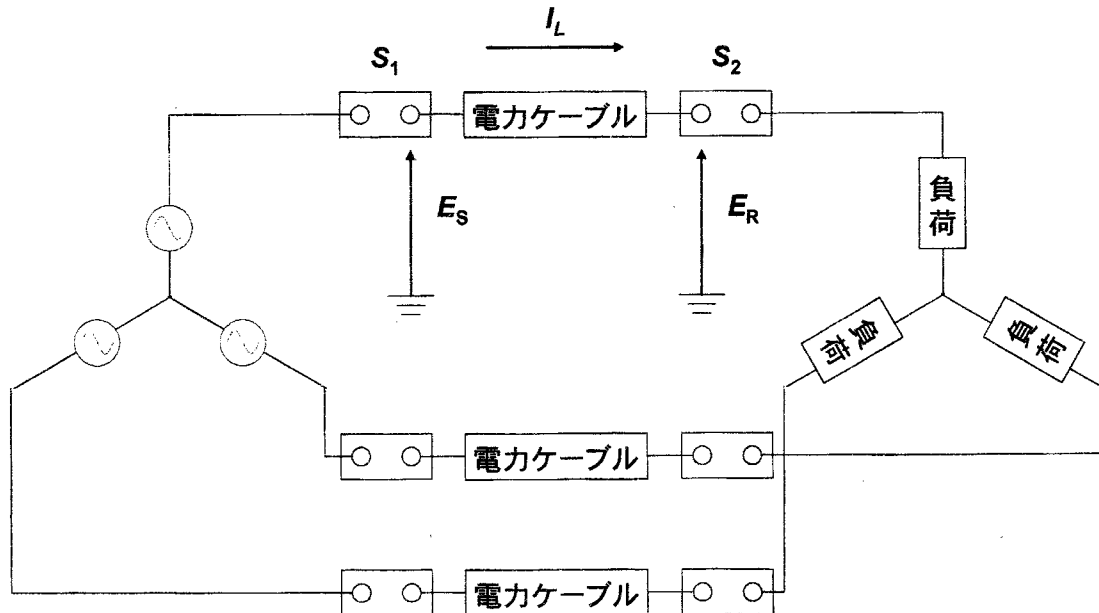


図1

2

図1の相互誘導回路(相互インダクタンス $M > 0$)でインダクタンス L_1 とインダクタンス L_2 の結合係数を1とする。その場合、図1の等価回路は図2で表すことができる。インピーダンス $|Z| = \infty$ の時の一次電流(向きは図1の電流 I_1 と同じとする)を電流 I_0 とする。交流電源電圧 E の角周波数を ω として以下の問いに答えよ。

- (1) 図1の回路方程式を書け。
- (2) 図1の電流 I_1 を電流 I_2 と電流 I_0 を用いて表せ。
- (3) 図1の電圧 V_2 を L_1, L_2 および E を用いて表せ。
- (4) 図2の電流 I_2' およびインピーダンス Z' を求めよ。

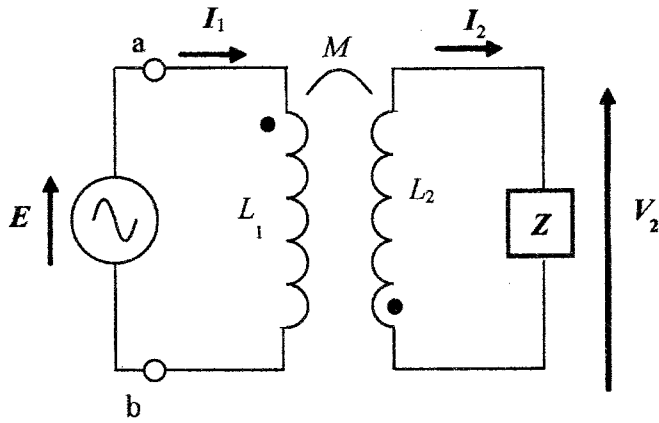


図1

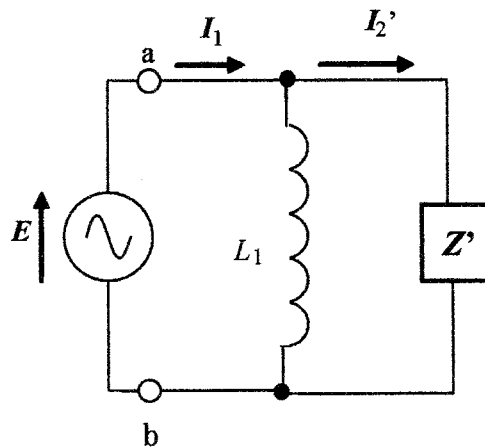


図2

npn トランジスタを用いたエミッタ接地回路の入力電圧 v_i , 入力電流 i_i , 出力電圧 v_o , 出力電流 i_o には以下のような関係が成り立つ。

$$\begin{pmatrix} v_i \\ i_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{ie} & h_{re} \\ h_{fe} & h_{oe} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_i \\ v_o \end{pmatrix}$$

ただし, h_{oe} と h_{re} は十分小さく無視できるものとする。

- (A) 図1の電流帰還型増幅回路について以下の問いに答えよ。
- (1) コレクタ電流の直流成分 I_C を求めよ。なお, ベース-エミッタ間電圧を V_{BE} とし, 直流ベース電流 I_B は R_1, R_2 を流れる直流電流および I_C に比べ十分小さいとする。
 - (2) コンデンサ C_1, C_2 の役割を説明せよ。
 - (3) C_1, C_2 のインピーダンスが十分小さく無視できる周波数における小信号等価回路を h パラメータ等を用いて示し, 電圧増幅率 $A_v = v_2 / v_1$ を求めよ。
 - (4) (3) の場合の入力インピーダンス R_i を求めよ。なお, $h_{fe} \gg 1, h_{fe} R_E \gg h_{ie}$ と近似してよい。
- (B) 図2は図1の回路のコレクタにベース接地回路をカスコード接続した回路である。
 Tr_1, Tr_2 の h パラメータは等しく, ベース-エミッタ間電圧はともに V_{BE} であるとする。
 また, Tr_1, Tr_2 の直流ベース電流は R_1, R_2, R_3, R_4 を流れる直流電流およびコレクタ電流の直流成分 I_C に比べ十分小さいとする。以下の問い答えよ。
- (5) Tr_2 の直流ベース電位 V_{B2} は R_3 と R_4 の比で定めることができるが, コレクタ電流 I_C を流すためには, V_{B2} は Tr_1, Tr_2 のコレクター-エミッタ間電圧が正になる範囲に設定する必要がある。 V_{B2} の範囲を $R_1, R_2, R_E, R_C, E_C, V_{BE}$ を用いて表せ。
 - (6) C_1, C_2, C_3 のインピーダンスが十分小さく無視できる周波数において, 電圧増幅率 $A_v = v_2 / v_1$ を h パラメータ, R_C, R_E を用いて表せ。

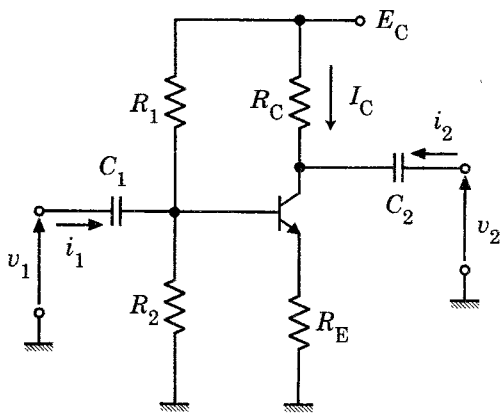


図1

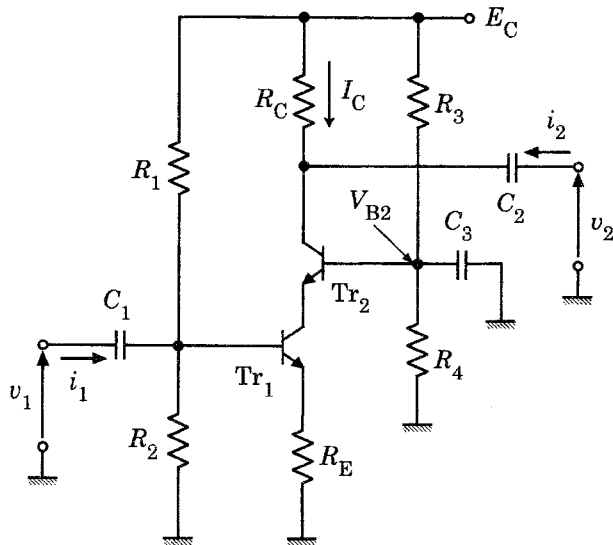


図2

結晶における定常状態の伝導電子の振る舞いについて考える。結晶内のポテンシャルエネルギーは一様で0と近似し、伝導電子は自由電子として振る舞うとして、以下の問に答えよ。

(1) 伝導電子の波動関数を $\varphi(x, y, z)$ とする。また、伝導電子の質量とエネルギーをそれぞれ m, E とする。この伝導電子に対するシュレーディンガー方程式を書け。

(2) 境界条件として周期的境界条件

$$\varphi(x, y, z) = \varphi(x+L, y, z) = \varphi(x, y+L, z) = \varphi(x, y, z+L)$$

を用い、波数ベクトルを \mathbf{k} とすると、波動関数は

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{L^3}} \exp\{i(k_x x + k_y y + k_z z)\}$$

と表される。ここで、 k_x, k_y, k_z はそれぞれ \mathbf{k} の x 方向、 y 方向、 z 方向の成分である。この時、

$$k_x = \frac{2\pi n_x}{L}, \quad k_y = \frac{2\pi n_y}{L}, \quad k_z = \frac{2\pi n_z}{L} \quad (n_x, n_y, n_z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

と表されることを示せ。

(3) 電子のエネルギー E を、波数の大きさ k ($=|\mathbf{k}|$)を用いて表せ。

(4) エネルギーが E 以下の電子状態に収容できる単位体積あたりの電子数 $N(E)$ を、電子のスピンも考慮して求めよ。

(5) 状態密度 $D(E)$ を求め、 E の関数としてその概略図を示せ。

5

表 1 の状態遷移表で表されるミーリー型順序回路 M を考える。図 1 は M の状態遷移図である。以下の問いに答えよ。

表 1. M の状態遷移表 (x は入力を表す)

| 現在の状態 | 次の状態 | | 出力 | |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| | $x=0$ | $x=1$ | $x=0$ | $x=1$ |
| q_0 | q_3 | q_4 | 0 | 0 |
| q_1 | q_2 | q_0 | 0 | 1 |
| q_2 | q_1 | q_3 | 0 | 1 |
| q_3 | q_0 | q_4 | 0 | 0 |
| q_4 | q_4 | q_2 | 0 | 0 |

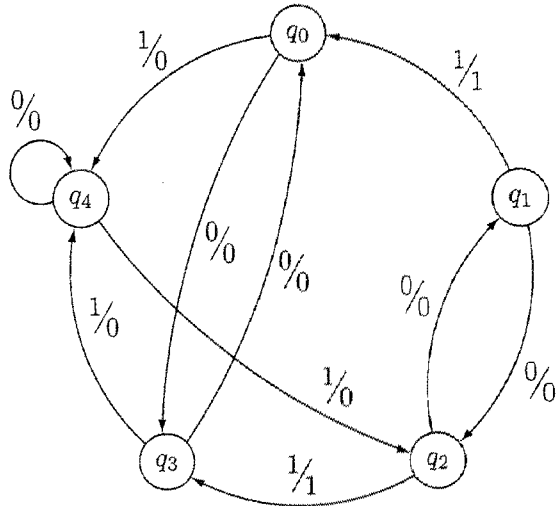


図 1. M の状態遷移図

- (1) M の状態集合 $\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$ を等価な状態同士に分割すると, $\{(q_0, q_3), (q_1, q_2), (q_4)\}$ の 3 つに分割できる事を示せ。

ただし, 状態 q_i と状態 q_j が等価であるとは, 任意の入力系列 \mathcal{X} に対し, $\omega^*(q_i, \mathcal{X}) = \omega^*(q_j, \mathcal{X})$ であることをいう。

ここで, $\omega^*(q_i, \mathcal{X})$ は, M が状態 q_i にあるときに入力系列 \mathcal{X} を与えたときの出力系列である。

- (2) q_0 と q_3 を p_0 , q_1 と q_2 を p_1 , q_4 を p_2 と表すことにより, M の状態数を最小化した順序回路を N とする。 N の状態集合を $\{p_0, p_1, p_2\}$ として, その状態遷移表を書け。また, N の状態遷移図を書け。

- (3) N は初期化可能ではないことを示せ。

ただし, ある入力系列 \mathcal{X} について, どの状態 p_j に対しても $\delta^*(p_j, \mathcal{X}) = p_i$ となる状態 p_i が存在するときに限り, N は初期化可能であるという。

ここで, $\delta^*(p_j, \mathcal{X})$ は, N が状態 p_j にあるときに入力系列 \mathcal{X} を与えたときの遷移後の状態を表す。

6

離散時間線形時不変システムの入力 $x(n)$ と出力 $y(n)$ の関係が次式で与えられるとき、以下の問いに答えよ。

$$y(n) = -\frac{1}{2}ax(n) + x(n-1) + 2by(n-1) - b^2y(n-2)$$

ここで、 a と b は任意の定数である。

- (1) 伝達関数 $H(z)$ を求めよ。
- (2) 次式で与えられる $x(n)$ が本システムに入力されたものとする。出力 $y(n)$ を求めよ。

$$x(n) = -\frac{2}{a} \left(\frac{2}{a}\right)^n u(n) + \frac{2b}{a} \left(\frac{2}{a}\right)^{n-1} u(n-1)$$

ここで、 $u(n)$ は単位ステップ関数である。

- (3) このシステムが安定となる a と b の条件を求めよ。

計算機で複雑な確率分布を持つ乱数を発生させる方法として、単純な分布を持つ変数を元に変換によって所望の分布を持つ変数にする方法が用いられる。いま、実数値をとる確率変数 X の確率密度関数 $p_X(x)$ が以下で与えられるとする。

$$p_X(x) = \begin{cases} 1 & (0 \leq x < 1) \\ 0 & (x < 0, x \geq 1) \end{cases} \dots \textcircled{1}$$

このとき、以下の問に答えよ。

- (1) 上記の確率変数 X を、 $Y = 2X + 1$ を用いて変換した確率変数 Y の確率分布関数 $F_Y(y) = P(Y \leq y)$ を求めよ。ただし、 $P(\theta)$ は事象 θ の発生確率とする。
- (2) (1)の結果を右微分することにより、 Y の確率密度関数 $p_Y(y)$ を求めよ。ただし、右微分とは次の式で与えられるものである。

$$f'_+(x) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- (3) 一般に $W = f(V)$ によって変数を変換する時、 $f(V)$ の逆関数が存在し、微分可能であるとき、以下の式が成り立つことを示せ。ただし、 $p_V(\cdot), p_W(\cdot)$ は、それぞれ確率変数 V, W の確率密度関数である。

$$p_W(w) = p_V(f^{-1}(w)) \left| \frac{d}{dw} f^{-1}(w) \right|$$

- (4) (3)の結果を用いて、確率変数 X の確率密度関数が①式で与えられるとき、 $Z = -\log_e X$ によって変換した確率変数 Z の確率密度関数を求めよ。

8

シンボル 0 と 1 を発生する情報源があり、シンボル 0 の発生確率が r であるとする。この情報源から出力される情報を、図 1 に示す誤り率 q (但し $q < 1/2$) である 2 元対称通信路を通して受信するとき、次の間に答えよ。なお、ここで $p(x_0), p(x_1), p(y_0), p(y_1)$ は、それぞれ送信シンボル 0, 1, 受信シンボル 0, 1 の発生確率とする。

- (1) 送信シンボルのエントロピー $H(X)$ を求めよ。
- (2) 受信シンボルのエントロピー $H(Y)$ を求めよ。
- (3) この通信路における散布度を示す条件付エントロピー $H(Y|X)$ は、情報源の発生確率に依存しないことを証明せよ。
- (4) 受信シンボルに着目すると、この通信路の通信容量は次式で定義される。

$$C = \max_{p(x_0)+p(x_1)=1} \{H(Y) - H(Y|X)\}$$

この通信容量を求め、その際のシンボル 0 の情報源発生確率 r を求めよ。

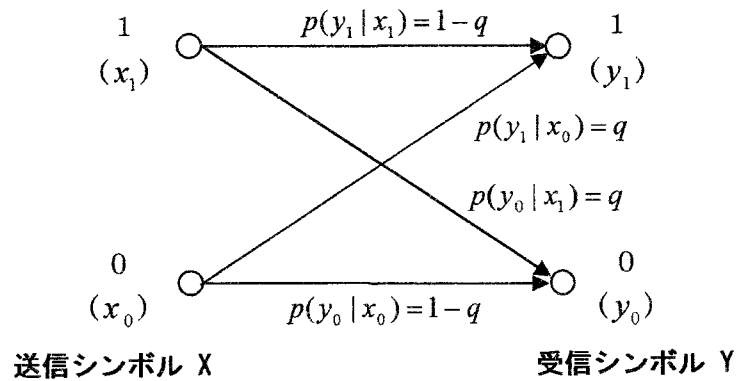


図 1