

1

1. 以下の不定積分を求めよ.

(1) $\int \sqrt{\frac{x-5}{x+2}} dx$ (ただし $x > 5$ とする.)

(2) $\int a^x \cos 2x dx$ (ただし a は正の定数であり $a \neq 1$ とする.)

2. 以下の問いに答えよ.

(1) $f(x) = \sin x$ を $x = 0$ において x についてテイラー展開せよ. ただし x の4次以上の項は省略し, 3次の項まで求めよ.

(2) 上の問(1)の結果を用いて, 次の極限を求めよ.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$$

(3) $f(x, y) = \cos(x - 5y + 2xy)$ を $x = 0, y = 0$ において x, y についてテイラー展開せよ. ただし x, y の3次以上の項は省略し, 2次の項まで求めよ.

1. 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ について、以下の問いに答えよ。

(1) A の固有値をすべて求めよ。

(2) A は直交行列 P によって対角行列 $P^T A P$ に変換される。 P を求めよ。ただし、 P^T は P の転置を表わす。 P として二つ以上の表現が可能なときは、そのうちの一つを答えよ。

(3) $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = a$ という式によって定義される図形が楕円面であることを示せ。また、この楕円面で囲まれる立体の3つの軸の半径を求めよ。ただし a は正の定数であり、 \mathbf{x} は実数を成分とする3次元列ベクトルである。 \mathbf{x}^T は \mathbf{x} の転置を表わす。

2. ある物質はAとBという2つの状態のどちらかをとる。光を1回照射すると、Aの状態にあった物質がBの状態に移る確率は30パーセント、Bの状態にあった物質がAの状態に移る確率は40パーセントである。最初にAの状態にある確率を a_0 、Bの状態にある確率を b_0 とし、 n 回光を照射したあとAの状態にある確率を a_n 、Bの状態にある確率を b_n とする。以下の問いに答えよ。

(1) a_1, b_1 を a_0, b_0 を用いて

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

とするとき、行列 W を書け。

(2) 行列 W の固有値と対応する固有ベクトルを求めよ。

(3) 上の問(2)の結果を用いて a_n, b_n を a_0, b_0 を用いて表せ。

(4) $n \rightarrow \infty$ としたときの a_n と b_n の比の極限を求めよ。

3

1. 以下の問いに答えよ.

(1) 常微分方程式 $xy(1+x^2)\frac{dy}{dx}=1+y^2$ を解け.

(2) 常微分方程式 $\frac{dy}{dx}+y=2xy^2e^x$ を $u=\frac{1}{y}$ とおいて解け.

2. 二階常微分方程式 $\frac{d^2x}{dt^2} + x - x^3 = 0$ の解の性質を以下の手順に従って調べよ.

(1) $y \equiv \frac{dx}{dt}$ で y を定義すると, 上記二階常微分方程式は次のような連立一階常微分方程

式により表される:

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y),$$

$$\frac{dy}{dt} = G(x, y).$$

$F(x, y), G(x, y)$ の式を示し, $F=G=0$ を満足する xy 平面上の点の座標をすべて挙げよ.

(2) 前問 (1) で求めた xy 平面上の点のうち, $x > 0$ なる点の座標を (x_c, y_c) とする. F, G

をこの点において次のように展開する:

$$\frac{dx}{dt} = F = a_1(x - x_c) + b_1(y - y_c) + F_2(x - x_c, y - y_c),$$

$$\frac{dy}{dt} = G = a_2(x - x_c) + b_2(y - y_c) + G_2(x - x_c, y - y_c).$$

ただし a_1, a_2, b_1, b_2 は定数であり, $F_2(x - x_c, y - y_c), G_2(x - x_c, y - y_c)$ は $(x - x_c), (y - y_c)$ の二次以上の多項式である. a_1, a_2, b_1, b_2 を求め, $F_2 = G_2 = 0$ と近似した場合の連立一階常微分方程式を導け.

(3) 前問 (2) で導いた連立一階常微分方程式を解くことにより, x についての一般解を求めよ.

(4) 前問 (3) で求めた一般解に対し, 次のような初期条件を課する:

$$t=0 \text{ において } x=x_c, \frac{dx}{dt}=1.$$

このとき $x=x(t)$ のグラフの概形を描け.

2つの粒子の速度が互いに独立でランダムな確率変数 V_1, V_2 で表されるものとする. V_1, V_2 の確率密度関数がそれぞれ次式で与えられるとき, 以下の問に答えよ.

$$f_1(v_1) = \begin{cases} \alpha v_1 & (0 \leq v_1 \leq 1) \\ 0 & (\text{それ以外の場合}) \end{cases} \quad (1)$$

$$f_2(v_2) = \begin{cases} \beta v_2(1 - v_2) & (0 \leq v_2 \leq 1) \\ 0 & (\text{それ以外の場合}) \end{cases} \quad (2)$$

ここで α および β は定数である.

- 1) α および β を求めよ.
- 2) V_2 の平均と分散を求めよ.
- 3) $V_1 \leq V_2$ となる確率を求めよ.
- 4) 2つの粒子のうち, 速い方の粒子の速度 v の確率分布関数を求めよ.

ヒント:

$$P(\max(V_1, V_2) \leq v) = P(V_1 \leq v, V_2 \leq v)$$

ここで P は確率を表す.

- 5) 2つの粒子のうち, 速い方の粒子の速度 v の期待値を求めよ.

図1～図3に示すように、半径 a の導体球A（以下導体Aとよぶ）をそれと同心の内半径 d の導体球殻B（以下導体Bとよぶ）が包んでいる。導体Aの中心を原点とし、原点からの距離を r とする。導体Aの表面上（ $r=a$ ）には電荷 $+Q$ が、そして導体Bの内面上（ $r=d$ ）には電荷 $-Q$ が与えられ、電荷はそれぞれの球面上で一様に分布しているものとする。

(1) 導体AとBの間に、内半径 b 、外半径 c の球殻を同心状におく。導体AとBの間で何も挿入されていない領域は真空（誘電率 ϵ_0 ）とする。

- 1) 図1に示すように、球殻が導体の場合について、ガウスの法則を用いて導体AとBの間における真空部分の電界の大きさと、挿入した導体内部の電界の大きさをそれぞれ求め、原点からの距離 r の関数で示せ。
- 2) 図2に示すように、球殻が誘電体（誘電率 ϵ ）の場合について、ガウスの法則を用いて導体AとBの間の電束密度 D 、及び導体AとBの間の真空部分の電界の大きさと誘電体内部の電界の大きさを求め、原点からの距離 r の関数で示せ。
- 3) 2)について、導体AとBの間の電位差 V と静電容量 C を求めよ。また、導体AとBの間を全て誘電体（誘電率 ϵ ）で満たしたときの導体AとBの間の電位差 V_f と静電容量 C_f を求めよ。

(2) 図3に示すように、導体AとBの間を誘電体1（誘電率 ϵ_1 ）と誘電体2（誘電率 ϵ_2 ）とで満たした場合を考える。

- 1) 導体AとBの間で原点からの距離 r に対する電界の大きさ E の変化を $\epsilon_1 > \epsilon_2$ と $\epsilon_1 < \epsilon_2$ のそれぞれの場合について、電界の大きさ E を縦軸、距離 r を横軸として図示せよ。なお、図中には $r=a, h, d$ それぞれに対応する電界の大きさを示せ。
- 2) 図3を答案用紙に書き写し、 $\epsilon_1 = 2\epsilon_2$ と $\epsilon_1 = \frac{\epsilon_2}{2}$ の場合について、導体Aと導体Bの間における電気力線を矢印で示せ。ただし、それぞれの場合について、電気力線の最大本数は8本とする。

(3) 導体AとBの間を誘電体内部の電界の大きさがあらゆる点で同一となるような誘電体で満たすとする。このとき誘電率 $\epsilon(r)$ を原点からの距離 r の関数で示せ。

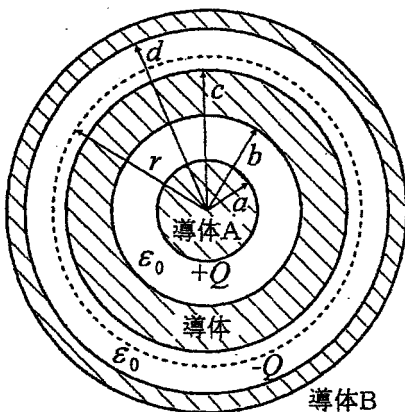


図1

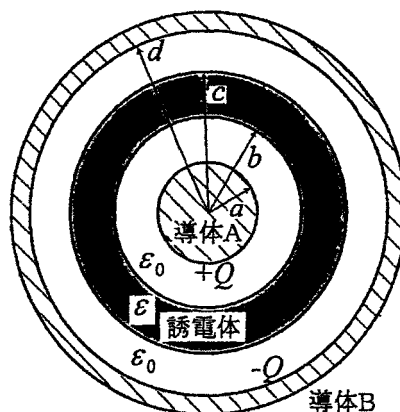


図2

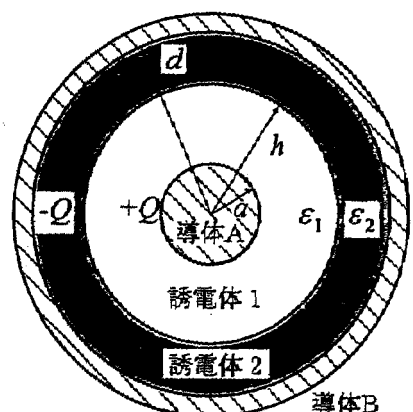


図3

(1) 半径 a の無限長円柱導体が図1のように x 軸上に設置されている. その中を流れる電流は, x 軸の正の向きで電流密度 J が中心軸からの距離 r の関数 $J=Kr$ (K は定数, $0 \leq r \leq a$) で与えられる. 以下の問いに答えよ. ただし, 解答には変数 J を用いてはならない.

- 1) 内径 r で外径 $r+dr$ ($0 \leq r \leq a$) の円筒に流れる電流を求めよ. ただし, dr は微小量とする.
- 2) 半径 r ($0 \leq r \leq a$) の円柱に流れる電流を求めよ.
- 3) 点 P が導体内と導体外のいずれかにあるとき, 点 P の磁界の強さ H を中心軸からの距離 r の関数としてそれぞれ求めよ. 磁界の強さ H を縦軸, 距離 r を横軸として図示せよ. なお, 図中 $r=a$ における磁界の強さを示せ.
- 4) z 軸の負の向きで円柱導体の中心軸から距離 b ($b > a$) だけ離れた場所に, 電流 I が流れている単位長さあたりの質量 m の無限長導線を xz 平面内で x 軸と平行に置く. 支えがなくなったときに無限長導線が落下しないための電流 I の大きさの範囲と向きを求めよ. ただし, 真空中の透磁率は μ_0 , 重力は z 軸の負の向きに作用し重力加速度は g とする.

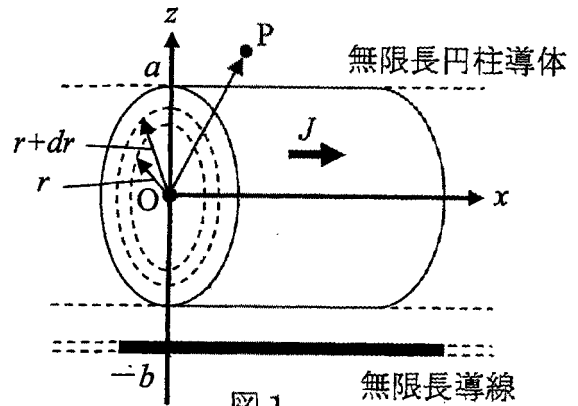


図1

(2) 電流 I が流れる有限長の直線導線が作る磁界について以下の問いに答えよ.

- 1) 図2のように長さ $L(=b+c)$ の直線導線上の点 O から距離 a だけ離れた点 P における磁界 H の強さを I, a, b, c を用いて示し, 向きを求めよ. ただし, 直線導線上の線素 dx が点 P に作る磁界 dH は, ビオ・サバールの法則から $dH = I(dx \times r) / (4\pi r^3)$ で与えられる. また, 線素 dx とベクトル r のなす角を θ とする. 微分公式 $(\tan \theta)' = 1/\cos^2 \theta$, $(\cot \theta)' = -1/\sin^2 \theta$, $(1/\sin \theta)' = -\cos \theta / \sin^2 \theta$, $(1/\cos \theta)' = \sin \theta / \cos^2 \theta$ を用いても良い.
- 2) 図3のように2辺の長さが $2e$ と $2f$ の長方形回路 $ABCD$ に電流 I が流れている. 長方形回路の中心 O から, 回路の作る面に垂直に距離 d だけ離れた点を Q とする. 導線 AB と導線 CD が点 Q に作る磁界の強さをそれぞれ H_{AB} と H_{CD} とするとき, 加え合わせた磁界の強さ $H_{AB,CD}$ を H_{AB} と H_{CD} を用いて示せ. 次に, 問い(2-1)の結果を用いて磁界の強さ H_{AB} と H_{CD} を求めよ. 長方形回路 $ABCD$ が点 Q に作る磁界の強さ $H_{AB,BC,CD,DA}$ を求めよ.

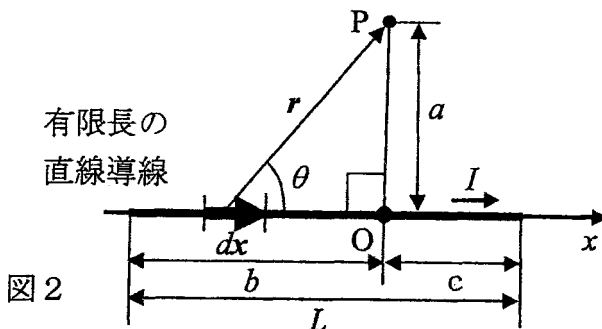


図2

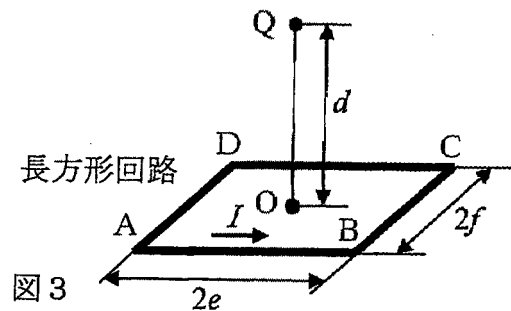


図3

平成21年度 名古屋大学大学院工学研究科 博士課程（前期課程）
電子情報システム専攻

入学試験問題

専 門

（平成20年8月27日（水）9:00～12:00）

注 意

1. 6問中3問を選んで答えよ。
2. 解答は問題ごとに別の答案用紙に書き、それぞれ問題番号、受験番号を上端に記入せよ。氏名は記入してはならない。なお、草稿用紙が1枚ある。解答が用紙の裏面にまわる場合は、答案用紙下部にその旨明示すること。又、上部横線に相当する位置以下に書くこと。
3. 問題用紙、答案用紙、草稿用紙はすべて持ち出してはならない。
4. 計算機類は使用してはならない。
5. 携帯電話は時計としても使用してはならない。電源を切ること。

1

すべり s で運転中の三相誘導電動機の 1 相分簡易等価回路は図 1 のように表される。ただし、 r_1 : 一次側巻き線抵抗, r_2' : 一次側に換算した二次側巻き線抵抗, x_1 : 一次側リアクタンス, x_2' : 一次側に換算した二次側リアクタンス, g_0 : 励磁コンダクタンス, b_0 : 励磁サセプタンスである。次下の問いに答えよ。

- (1) 図中に示した電流 I_0 および I_1' の大きさを印加電圧 V の大きさ $|V|$ および等価回路定数を用いて表せ。
- (2) 一次側巻き線抵抗での損失（一次側銅損）を $|V|$ および等価回路定数を用いて表せ。
- (3) 二次側の等価抵抗 r_2'/s は銅損を表す抵抗分と機械的出力を表す抵抗分との和である。機械的出力を表す抵抗 r_m' （一次側換算）を求めよ。
- (4) 二次側入力（二次側で消費される電力） P_2 と機械的出力 P_{out} との比を求めよ。
- (5) 定格周波数 50 Hz, 定格電圧 200 V, 2 極の三相誘導電動機が定格運転している場合を考える。
 - (a) 図中の V の大きさはいくつか。
 - (b) 回転磁界の回転数は毎分何回転か。
 - (c) この三相誘導電動機が毎分 2850 回転しているときのすべり s の大きさはいくつか。
 - (d) このときの二次側の効率（出力/入力） η を求めよ。

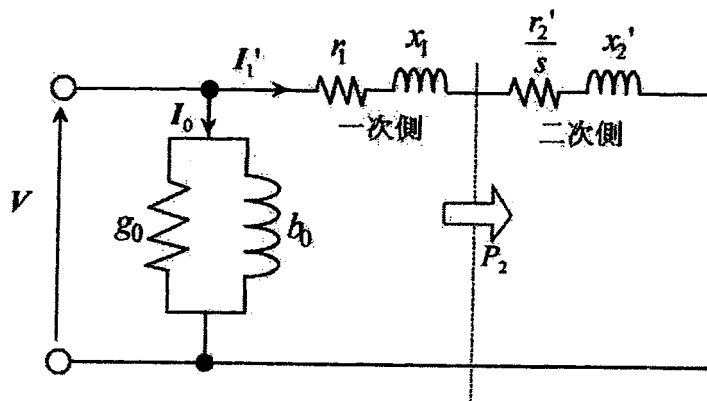


図 1

2

電圧 E , $2E$ の直流電圧源, インダクタンス L のコイル, 値 R の抵抗, 容量 C のコンデンサ及びスイッチ S_1 , S_2 からなる図1の回路に関して, 以下の問いに答えよ. ただし時刻 $t < 0$ でコンデンサの電荷は0とする. また自然対数の底を e とせよ.

- (1) $t = 0$ で S_1 を (a) 側に閉じた. コンデンサに流れる電流 $i(t)$ に関する回路方程式を書き, $t > 0$ での電流 $i(t)$ を求めよ. ただし S_2 は開いている.
- (2) $t = RC$ において, S_1 を (a) 側から (b) 側に切り替えた. $t > RC$ におけるコンデンサに流れる電流 $i(t)$ を求めよ.
- (3) $t > 0$ での電流 $i(t)$ の変化の概略を図示せよ.
- (4) S_1 を (b) 側に切り替え定常状態に達した後, $t = t_1$ で S_1 を開き, 同時に S_2 を閉じた. その後のコンデンサに流れる電流 $i(t)$ を求めよ. また, その概略を $t > t_1$ に対して図示せよ. ただし, $R = 200 \Omega$, $L = 0.1 \text{ H}$, $C = 5 \mu\text{F}$ とする.

必要であれば, ラプラス変換公式

$$\mathcal{L}[\sin \omega t] = \omega / (s^2 + \omega^2)$$

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = s / (s^2 + \omega^2)$$

を利用してよい.

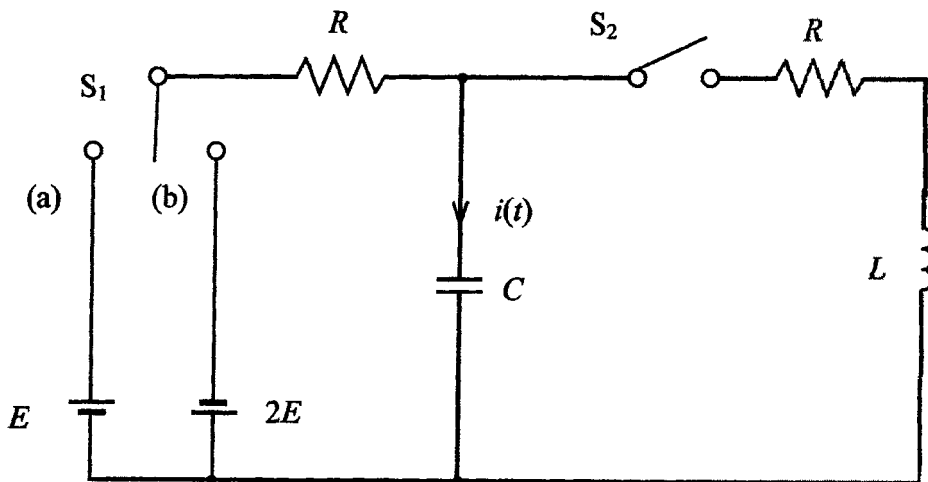


図1

3

図 1, 2 に示す npn および pnp トランジスタを用いた A 級, B 級増幅回路について以下の間に答えよ。なお, npn トランジスタは図 3 の静特性をもつトランジスタであり, pnp トランジスタは図 3 と特性の等しいコンプリメンタリ (相補的) なトランジスタとする。また, 記号の大文字 (I_C 等) は直流成分を小文字 (i_c 等) は交流成分を表すものとする。

図 1 の A 級増幅回路について以下の間に答えよ。なお, $E_{CE} = 12\text{ V}$, $R_C = 300\ \Omega$ とする。

- (1) 図 1 において歪みの無い最大のコレクタ電流振幅 i_c を得るための動作点 ($v_1 = 0$ の時のコレクタ・エミッタ間電圧 V_{CE} , コレクタ電流 I_C の値) を求めよ。
- (2) (1) の動作点において得られる歪みの無い最大のコレクタ電流振幅 i_c とその時の交流出力電力 P_o を求めよ。
- (3) (2) の出力時の電源効率 (電源が供給する電力に対する交流出力電力) を求めよ。なお, トランジスタのベース電位のバイアスに必要な電力は無視せよ。

図 2 の B 級増幅回路について以下の間に答えよ。なお, $E_{CE1} = E_{CE2} = 12\text{ V}$, $R_C = 300\ \Omega$ とする。

- (4) 図 2 において最大の電源効率を得るためのトランジスタ Tr_1 , Tr_2 の動作点 ($v_1 = 0$ の時の V_{CE} , I_C の値) を求めよ。また, この動作点で, 歪みの無い出力を得るためには Tr_1 , Tr_2 のベース電位 E_{BE1} , E_{BE2} を何 V にすればよいか。図 3 のベース電流 I_B -ベース・エミッタ間電圧 V_{BE} 静特性から求めよ。
- (5) (4) のベース電位で, 入力電圧 $v_1 = 0.02 \sin \omega t$ (V) の交流入力信号を加えた。 Tr_1 , Tr_2 のベース電流 i_{B1} , i_{B2} の波形の概略を v_1 の波形に対比させて図示せよ。なお, ベース電流の単位, 目盛, 数値を入れて図示すること。
- (6) 負荷抵抗 R_C での交流出力電力 P_o を求め, 電源効率 (電源 E_{CE1} , E_{CE2} が供給する電力に対する交流出力電力) を求めよ。なお, π は 3 としよ。

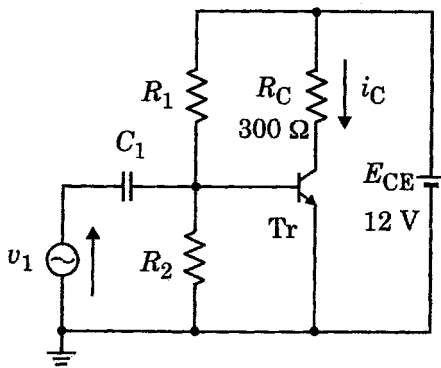


図 1

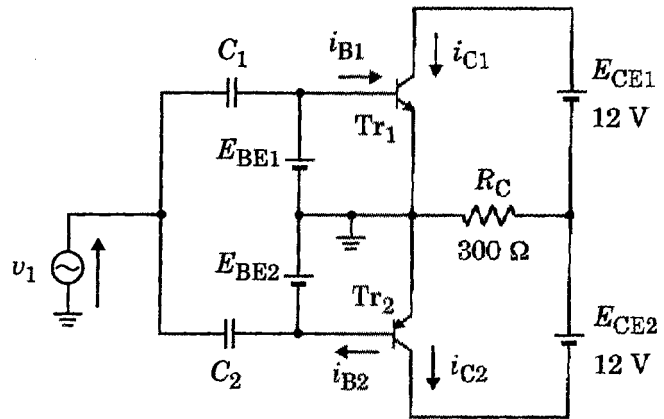


図 2

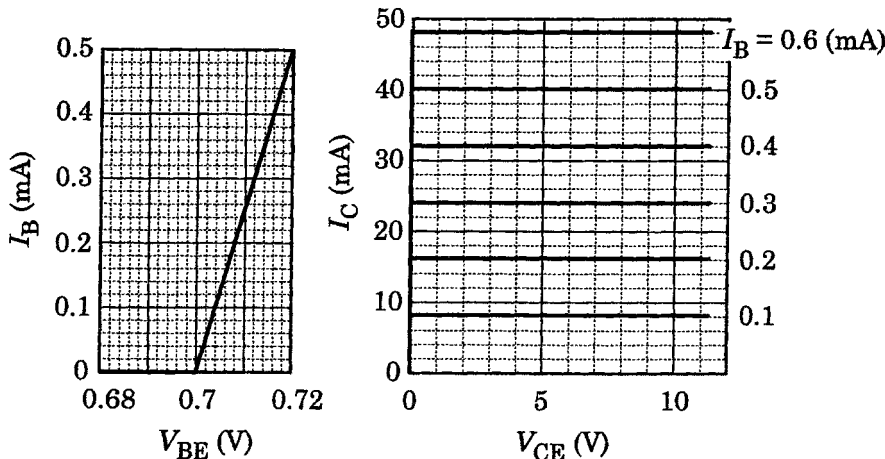


図 3

n型半導体のキャリア密度について考えてみる.

1. (1) n型半導体の価電子帯の頂上のエネルギー E_V と伝導帯の底のエネルギー E_C , ドナー準位 E_D としてそれらエネルギーの大小関係を図示しなさい.

- (2) エネルギー E の1つのエネルギー準位が電子で占められる確率 $f(E)$ を関数式で表現しなさい. また, その関数式の名前を示しなさい. ただし, ボルツマン定数を k_B , 絶対温度を T とし, フェルミ準位を E_F とする.

2. 半導体中の電子の固有状態が波数ベクトル \vec{k} とスピン $\pm 1/2$ で表わされ, 固有エネルギー E が, 伝導帯において $E = E_C + \hbar^2 k^2 / (2m_e)$, 価電子帯において $E = E_V - \hbar^2 k^2 / (2m_h)$ により与えられるとする. ここに \hbar はプランク定数を 2π で割った定数, m_e , m_h は電子, 正孔の有効質量である. 固有状態は \vec{k} 空間で等間隔に分布し, 区間 $k_x \sim k_x + \Delta k_x$, $k_y \sim k_y + \Delta k_y$, $k_z \sim k_z + \Delta k_z$ における固有状態数は $2 \frac{V}{(2\pi)^3} \Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z$ で与えられる. ここに V は半導体の体積である.

- (1) エネルギー $E \sim E + \Delta E$ における固有状態数を $V D(E) \Delta E$ としたとき, 単位体積当りのエネルギー状態密度 $D(E)$ を伝導帯, 価電子帯について求めなさい.

- (2) 伝導帯中および価電子帯中のキャリア密度をそれぞれ n 及び p とした場合, $E_C - E_F \gg k_B T$, $E_F - E_V \gg k_B T$ が成り立つときに

$$n = N_C \exp\left(-\frac{E_C - E_F}{k_B T}\right), \quad p = N_V \exp\left(\frac{E_V - E_F}{k_B T}\right)$$

と近似できることを示し, 伝導帯及び価電子帯の有効状態密度 N_C , N_V を m_e , m_h , T , k_B , \hbar を用いて表わしなさい. 必要であれば

$$\int_0^{\infty} \sqrt{x} e^{-x} dx = \sqrt{\pi}/2 \text{ を用いなさい.}$$

3. 図1にn型半導体のキャリア密度 n の温度依存性を示す。(a), (b) 及び (c) の三つの領域に分類して考えてみる.

- (1) (a)領域において, キャリア密度 n を N_C , N_V , E_C , E_V , $k_B T$ を用いて表しなさい.
- (2) (b)領域において, 一定となるキャリア密度 n が何によって決まるのか, 説明しなさい.
- (3) (c)領域において極めて低温の場合における傾きはいくらか. また, その傾きが何を意味するのか述べなさい.

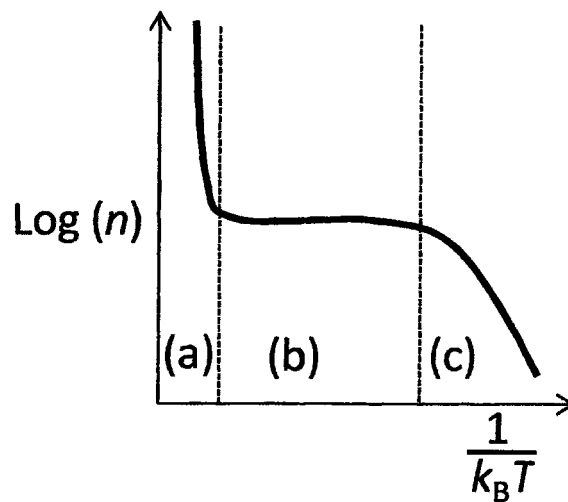


図1

5

(1) メモリを利用して、組み合わせ回路を構成する。このとき、次の間に答えよ。

- 1) 表1のようにデータが格納されているメモリがある。このメモリのデータ出力 D_0 をアドレス入力 A_2, A_1, A_0 を用いた論理式で表すことを考える。カルノー図を用い簡単化を行った結果を加法標準形で示せ。

表 1

アドレス A_2, A_1, A_0	データ D_0
000	0
001	0
010	1
011	1
100	0
101	1
110	0
111	1

- 2) アドレス入力 A_2, A_1, A_0 に対してデータ出力 D_0 を持つメモリを利用し、以下に示す論理式を実現する場合、各アドレス A_2, A_1, A_0 に格納すべきデータを表1のように示せ。

$$D_0 = A_1 A_0 + A_2 (A_1 + A_0)$$

- (2) 図1の回路について、次の問いに答えよ。

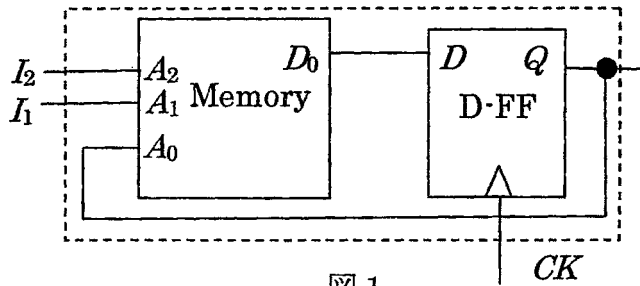


図 1

表 2

アドレス A_2, A_1, A_0	データ D_0
000	0
001	1
010	0
011	0
100	1
101	1
110	1
111	0

- 1) 図1の回路のメモリに表2の値が格納されている。入力を I_2, I_1 , 出力を Q とするとき、この回路の状態遷移図を示せ。但し、状態遷移図は、状態数を最小化した形で示すこととする。
- 2) 図1の回路を用いて、 $I_2=1$ かつ $I_1=1$ でクロック CK に同期して Q に1と0を交互に出力、 $I_2=1$ かつ $I_1=0$ で Q を保持、また $I_2=0$ で $Q=0$ となる電子ルーレットを構成する。この電子ルーレットの状態遷移図、状態遷移表を作成し、図1の回路のメモリに格納しておくデータを表2のように示せ。但し、状態遷移図、状態遷移表は、状態数を最小化した形で示すこととする。

6

以下で生成行列が与えられる (7,4) ハミング符号を考える.

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

この符号は4つの情報ビット $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ を7ビットの符号語 $\mathbf{x}G$ に符号化する. 以下の問いに答えよ.

(1) 対応する検査行列

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} & 1 & 0 & 0 \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} & 0 & 1 & 0 \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

の要素 $h_{11}, h_{12}, \dots, h_{34}$ を求めよ.

(2) この符号の最小ハミング距離は幾つか. 理由を付して答えよ.

(3) 問(2)で得られた最小ハミング距離に基づき, 本符号が1重誤り訂正符号であることを説明せよ.

(4) ある符号語 \mathbf{x}_0G が誤りの発生しうる通信路を経て伝送され, その過程で1ビットが誤って $(1, 0, 1, 1, 0, 0, 1)$ が受信されたとする. 誤り訂正を行い, 正しい情報ビット列 \mathbf{x}_0 を求めよ.

(5) $\{0, 1\}$ を各々等確率で発生する無記憶情報源の出力を, 誤り確率 p ($0 \leq p \leq 1$) の無記憶2元対称通信路を経て送信する場合を考える (図1参照). 情報源の出力を符号化せずにそのまま伝送した場合に連続した4つの情報ビットが誤り無く伝送される確率を $q_d(p)$, 同じ4つの情報ビットを (7,4) ハミング符号を用いて符号化し受信後に1ビットまでの誤り訂正を行った場合に全ての情報ビットが正しく伝送される確率を $q_h(p)$ とする. 関係式 $q_d(p) < q_h(p)$ が成立する p の範囲を求めよ.

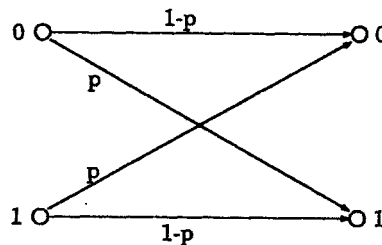


図1 2元対称通信路