

平成22年度 名古屋大学大学院工学研究科 博士課程（前期課程）
電子情報システム専攻

入学試験問題

基 礎

（平成21年8月25日（火）13:30～16:30）

注 意

1. 6問中3問を選んで答えよ。
2. 解答は問題ごとに別の答案用紙に書き、それぞれ問題番号、受験番号を上端に記入せよ。氏名は記入してはならない。なお、草稿用紙が1枚ある。解答が用紙の裏面にまわる場合は、答案用紙下部にその旨明示すること。又、上部横線に相当する位置以下に書くこと。
3. 問題用紙、答案用紙、草稿用紙はすべて持ち出してはならない。
4. 計算機類は使用してはならない。
5. 携帯電話は時計としても使用してはならない。電源を切ること。

1

1. 次の問いに答えよ。ただし、 x, y は実数とする。

(1) 積分変数 x, y を 2次元極座標に変換して、次の定積分 S を求めよ。

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

(2) S を用いて、次のガウス積分 G を求めよ。

$$G = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

(3) $G_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-x^2} dx$ ($n=0, 1, 2, \dots$) とする。以下の問いに答えよ。

1) n が奇数の場合について、 G_n を求めよ。

2) n が偶数の場合について、 G_n に関する漸化式を記述せよ。それを用いて、 G_n を求めよ。(ヒント： $n=2m$ ($m=0, 1, 2, \dots$) とおくと、 G_n に関する漸化式は $m \geq 1$ について G_{2m} と $G_{2(m-1)}$ の関係式である。)

2. 楕円を表す式 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ があり、その曲線上のある点 (x_1, y_1) における接線を考える。

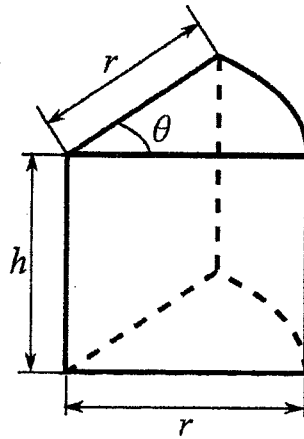
以下の問いに答えよ。ただし、 $a > 0$, $b > 0$ とする。

(1) まず、式の微分をとって、点 (x_1, y_1) における接線の傾きを a, b, x_1, y_1 を用いて表せ。次に、この結果を用いて、接線の式を導け。ただし、 $x_1 y_1 \neq 0$ とする。

(2) $x_1 \geq 0$, $y_1 \geq 0$ の領域で、接線の x 軸との交点を A , y 軸との交点を B とする。線分 AB の長さ L を a, b, x_1 を用いて表せ。

(3) 上の問 (2) の結果を用いて、 L を最小にする x_1 と L の最小値を求めよ。

3. 半径 r 、高さ h の円柱から下図のように角度 θ だけ切り出した立体を考える。この立体の体積を V 、表面積を S として、以下の問いに答えよ。ただし、 $0 < \theta < 2\pi$ とする。なお、 V は S 一定の条件下においてただ一つの極値（最大値）をもつことがわかっているとす。



- (1) 体積 V と表面積 S を r 、 h 、 θ の 3 変数を用いて表せ。
- (2) 上の問 (1) の結果から h を消去し、 V を r 、 θ 、 S の関数として表せ。
- (3) 上の問 (2) で求めた関数の偏導関数 $\frac{\partial V}{\partial r}$ 、 $\frac{\partial V}{\partial \theta}$ 、 $\frac{\partial V}{\partial S}$ を求めよ。
- (4) S 一定の条件下で V に極値を与える r 、 θ を求めよ。
- (5) S 一定の条件下での V の最大値 $V_{\max}(S)$ を求めよ。

2

1. 行列 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ について、以下の問いに答えよ。

(1) 行列 \mathbf{A} の固有多項式 (固有値を求めるための多項式) を求めよ。

(2) $\mathbf{F}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^5 - \mathbf{A}^4 - 6\mathbf{A}^3 - 6\mathbf{A} - \mathbf{I}$ を求めよ。ここで、 \mathbf{I} は単位行列である。

必要であれば、次の「ケーリー・ハミルトンの定理」を用いよ。すなわち、 n 次正方行列 \mathbf{C} の固有多項式を

$$f_{\mathbf{C}}(\lambda) = c_0 \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + \dots + c_n$$

とすれば、

$$c_0 \mathbf{C}^n + c_1 \mathbf{C}^{n-1} + \dots + c_n \mathbf{I} = \mathbf{O}$$

が成り立つ。ここで、 \mathbf{O} はゼロ行列である。

(3) \mathbf{A}^{-2} を求めよ。ここで、 $\mathbf{A}^{-2} = (\mathbf{A}^{-1})^2$ である。

2. 以下の問いに答えよ。

(1) 行列 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の階数 (ランク) を求めよ。ただし、その導出過程を明記すること。

(2) 上の問 (1) の結果を参考にして、次の連立一次方程式の解を求めよ。

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 5x_3 - 2x_4 = -2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 16 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

3

1. 常微分方程式

$$\frac{d^3 y}{dx^3} - \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + y = \sin x$$

について以下の問いに答えよ.

- (1) 常微分方程式の右辺を 0 とおいた斉次方程式 (同次方程式) の一般解を求めよ.
- (2) 常微分方程式の特解を求めよ.
- (3) 常微分方程式の一般解で, 条件 $y(0)=1$, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0}=1$, $\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_{x=0}=0$ を満たす解を求めよ.

2. 以下の常微分方程式の一般解を求めよ. なお, x, y は実数である.

- (1) $(2x+2y-1)\frac{dy}{dx} = -2x+6y-3$ (ヒント: $X=x$, $Y=y-\frac{1}{2}$ とおくとよい.)
- (2) $(2xe^{3y} + e^x)dx + (3x^2 e^{3y} - y^2)dy = 0$

4

- (1) 確率変数 x, y の確率密度関数をそれぞれ $p_x(x), p_y(y)$ とする。確率変数 x, y は互いに独立で $[0, 1]$ の範囲の一様分布に従うとする。このとき、以下の問いに答えよ。
- 1) $z = x + y$ および $w = x - y$ について、各々の確率密度関数 $p_z(z), p_w(w)$ を図示せよ。
 - 2) 確率変数 z と w は独立であるか述べ、それを証明せよ。
 - 3) 確率変数 z と w は無相関であるか述べ、それを証明せよ。
- (2) 確率変数 a, b は、各々、平均 $m_a = 10, m_b = 0$ 、分散 $\sigma_a^2 = 4, \sigma_b^2 = 1$ であり、相関係数が $\rho_{a,b} = C_{a,b}/(\sigma_a\sigma_b) = 0.75$ である正規分布である。但し $C_{a,b}$ は a と b の共分散とする。また $c = a + b$ および $d = a - b$ とする。このとき、以下の問いに答えよ。
- 1) 確率変数 c および d について、各々の平均 m_c, m_d および分散 σ_c^2, σ_d^2 を示せ。
 - 2) 確率変数 c と d の相関係数を示せ。

5

図1に示すように、真空中（誘電率 ϵ_0 ）に、厚さ d 、互いに対向する面積 S の導体板3枚を、間隔が a と $b-a$ （ただし $a < b/2$ ）になるように平行に並べる（以下、左から順に導体板1、2、3と呼ぶ）。また、連動して開閉するスイッチ SW_1 と電位差 V_0 の直流電源、スイッチ SW_2 が接続されている。導体板2はスイッチ SW_1 を通して接地が可能である。初期状態において、スイッチ SW_1 、 SW_2 は開放されているとする。導体板1の左端を原点とし、導体板1、2、3が並ぶ方向に x 軸をとる。導体板の端面から発生する電気力線は無視できるものとし、導体板間に発生する電気力線は一様で x 軸に平行になるものとする。

(1) スイッチ SW_1 を閉じ、スイッチ SW_2 は開放のままとする。

- 1) x 軸右向を正として電位 $V(x)$ と電界の x 成分 $E(x)$ を $0 \leq x \leq b+3d$ の範囲において式で表せ。次に、 $V(x)$ と $E(x)$ を、 x を横軸として図示せよ。
- 2) 導体板2の左面と右面の面電荷密度をそれぞれ σ_1 と σ_2 として、これらを求めよ。
- 3) 導体板1、2間と導体板2、3間の静電容量をそれぞれ C_1 と C_2 として、これらを求めよ。

(2) 次に、スイッチ SW_2 は開放のまま、スイッチ SW_1 を開放する。

- 1) 3枚の導体板間に蓄えられている静電エネルギー U を、 S 、 ϵ_0 、 σ_1 、 σ_2 、 a 、 b を用いて表せ。
- 2) 導体板2に働く力 F を、 S 、 ϵ_0 、 V_0 、 a 、 b を用いて表せ。

(3) 次に、スイッチ SW_1 は開放のまま、スイッチ SW_2 を閉じる。そして、導体板2を導体板1、2間、導体板2、3間がともに $b/2$ となるようにゆっくりと x 軸方向に動かした。このとき、導体板2の左面と右面の面電荷密度をそれぞれ σ_1' と σ_2' として、これらを、 ϵ_0 、 V_0 、 a 、 b を用いて表せ。

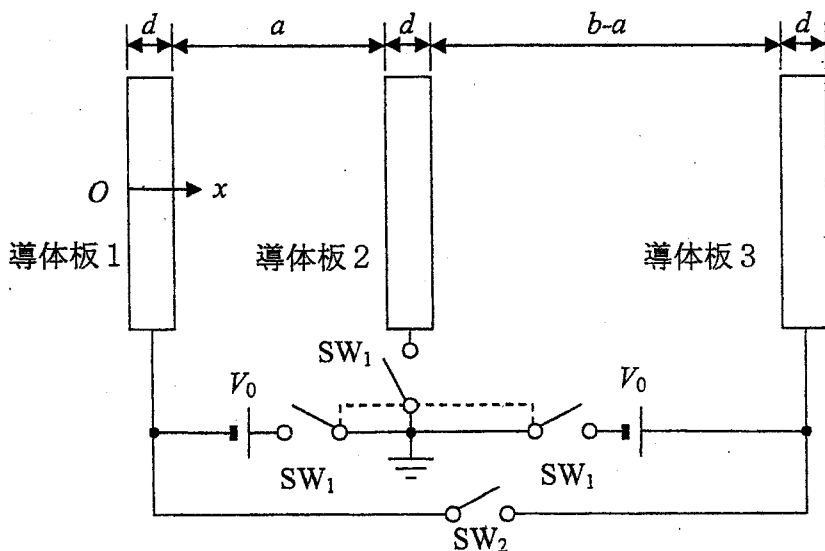


図1

図1のように、真空中で、 $z=0$ の平面上、原点を中心とし半径 a の円周に沿って電流 I_a が流れている。また、 $(0, 0, z)$ を中心とする半径 b ($b \ll a$) の円周上を、電荷 q を持つ粒子が一定の角速度 $\omega = d\theta/dt$ で円運動をしている。この部分の拡大図を図2に示した。以下では、粒子の作る磁界は電流 I_a には影響を与えないものとし、真空の透磁率を μ_0 とする。また、粒子の質量は無視できるものとする。

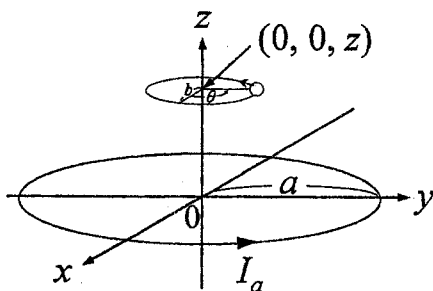


図1

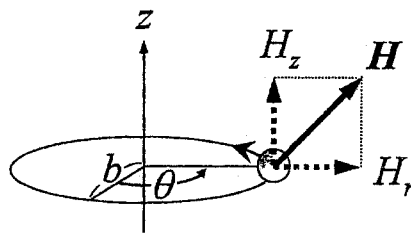


図2

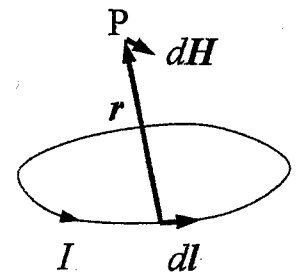


図3

- (1) I_a の電流ループが作る磁界 \mathbf{H} を、 z 軸上の点 $(0, 0, z)$ で求めよ。ただし、図3のように電流 I が流れているとき、微小な線素 dl が点 P に作る磁界 $d\mathbf{H}$ は、ビオ・サバールの法則から $d\mathbf{H} = I (dl \times \mathbf{r}) / (4\pi r^3)$ で与えられる。ただし、 \mathbf{r} は線素 dl から点 P へのベクトルである。

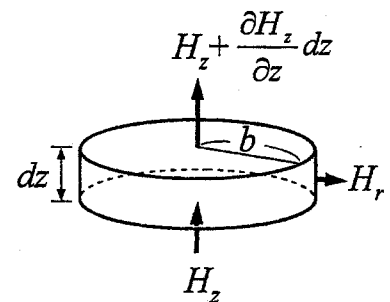


図4

- (2) I_a の電流ループが作る磁界 \mathbf{H} は空間的に変化し、 z 軸に対し回転対称である。 $\text{div}(\mu_0 \mathbf{H}) = 0$ から、図4のように微小高さ dz 、半径 b の円筒表面での磁界を考えることにより、 $H_r = -\frac{b}{2} \frac{\partial H_z}{\partial z}$ が成り立つことを示せ。
- (3) 一般に環を流れる電流が作る磁気双極子モーメントの大きさは $m = \mu_0 I S$ で与えられる。ここに S は環の面積、 I は電流である。図2に示した円運動している粒子による磁気双極子モーメントが $m = \mu_0 q \omega b^2 / 2$ となることを示せ。

- (4) 問(2)(3)の結果を用い、図2の粒子に働く力 \mathbf{F} に対する円運動一周期の平均の値

$$\bar{\mathbf{F}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{F} d\theta \quad \text{を } m \text{ と } H_z \text{ により表せ。}$$

- (5) 図1の粒子に働く、平均の力 $\bar{\mathbf{F}}$ の絶対値が最大となる z を求めよ。

平成22年度 名古屋大学大学院工学研究科 博士課程（前期課程）
電子情報システム専攻

入学試験問題

専 門

（平成21年8月26日（水）9:00～12:00）

注 意

1. 6問中3問を選んで答えよ。
2. 解答は問題ごとに別の答案用紙に書き、それぞれ問題番号、受験番号を上端に記入せよ。氏名は記入してはならない。なお、草稿用紙が1枚ある。解答が用紙の裏面にまわる場合は、答案用紙下部にその旨明示すること。又、上部横線に相当する位置以下に書くこと。
3. 問題用紙、答案用紙、草稿用紙はすべて持ち出してはならない。
4. 計算機類は使用してはならない。
5. 携帯電話は時計としても使用してはならない。電源を切ること。

1

図1に示すように、周波数 50 Hz, 相順 a→b→c で運用された平衡三相電源が一回線の平衡三相送電線を介して受電端の平衡三相インピーダンス負荷に電力を供給している。送電端電圧 ($|E_{s-a}| = |E_{s-b}| = |E_{s-c}|$) を調整することで、受電端の線間電圧の実効値は常に 6 kV に維持されている。また、平衡三相インピーダンス負荷は Y 結線されている。

平衡三相インピーダンス負荷が有効電力 36 MW, 力率 1 の場合について、次の各問に答えよ。

- (1) a 相, b 相および c 相の対地電圧の時間変化を一つのグラフに図示せよ。
- (2) 負荷のインピーダンス Z_L の大きさを求めよ。また、インピーダンス負荷を線形受動素子によって表し, a 相について, 一相分の等価回路を示せ。
- (3) a 相における瞬時電力 $p_a(t)$ の時間変化を図示せよ。

図1の平衡三相負荷に対し、さらに、 $Z_2 = 2/3 + j\sqrt{2}/3$ [Ω] の誘導性負荷を各相に並列に追加接続した。次の各問に答えよ。

- (4) 実際の三相の誘導性負荷としては、一般にどのようなものが考えられるか、答えよ。
- (5) 追加した誘導性負荷を含む負荷全体の力率 $\cos\theta_r$ を求めよ。
- (6) 一相分の線路インピーダンスが $Z_L = R_L + jX_L$ [Ω] と表されるとして、ベクトル図を用いて、a 相における電流 I_a , 受電端電圧 E_{r-a} および送電端電圧 E_{s-a} の関係を示せ。ただし、図中には受電端の力率角 θ_r および送電端の力率角 θ_s を明記すること。なお、 I_a , E_{r-a} および E_{s-a} の大きさを求める必要はない。

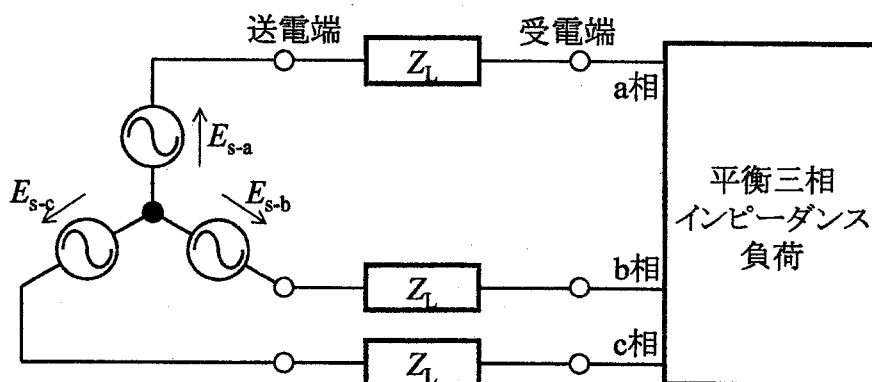


図1

2

インピーダンス Z が図1のように構成されている。以下の問いに答えよ。なお、虚数単位を j 、角周波数を ω とする。

- (1) インピーダンス Z を R_1 , R_2 と C を用いて表せ。
- (2) Z の実数部 $\text{Re}(Z)$ と虚数部 $\text{Im}(Z)$ を R_1 , R_2 と C を用いて表せ。
- (3) 横軸を $\text{Re}(Z)$ 、縦軸を $-\text{Im}(Z)$ とし、周波数を 0 から ∞ まで変化させた軌跡を図示せよ。なお、周波数 0 と ∞ の位置を示すこと。
- (4) この電気回路に電圧 E のステップ電圧を $t = 0$ で印加した。ステップ電圧を印加した直後に流れる電流 I_0 を求めよ。なお、 C の初期蓄積電荷は 0 である。
- (5) ステップ電圧を印加後、 $t \rightarrow \infty$ における電流 I_∞ を求めよ。
- (6) ステップ電圧を印加した直後から R_1 を流れる電流の時間変化の概略を図示せよ。
- (7) ステップ電圧を印加して十分時間が経るまでに C に流れ込んだ電流の積分値を求めよ。
- (8) ステップ電圧を印加して十分時間が経た後の C に蓄積される静電エネルギーを求めよ。
- (9) ステップ電圧を印加して十分時間が経た後にインピーダンスの両端を短絡した。短絡後、 R_1 を流れる電流 $i_1(t)$ を求めよ。
- (10) 短絡後 R_1 , R_2 で発生するジュール損の和を求めよ。

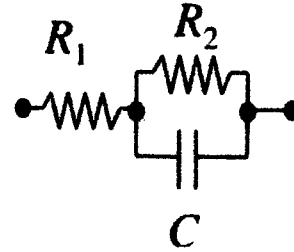


図1 インピーダンス Z

3

(1) エミッタ接地トランジスタの小信号入力に対する入出力特性は、 h パラメータを
つかって次のように表すことができる。

$$\begin{pmatrix} v_i \\ i_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{ie} & h_{re} \\ h_{fe} & h_{oe} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_i \\ v_o \end{pmatrix}$$

ここで、 v_i , i_i , v_o , i_o は、それぞれ、入力電圧、入力電流、出力電圧、出力電流である。
トランジスタの等価回路を h パラメータを用いて示せ。

(2) 図1の差動増幅回路においてトランジスタ Tr_1 と Tr_2 は同じ特性をもち、 h パラ
メータは等しい。 h_{re} , h_{oe} は十分小さく無視できるものとして、以下の問いに答えよ。

- 1) この回路の小信号等価回路を、エミッタ接地 h パラメータを用いて示せ。
- 2) 同相入力 ($v_{i1}=v_{i2}=v_i$) に対する電圧増幅度 $A_c=v_o/v_i$ を求めよ。
- 3) 逆相入力 ($v_{i1}=-v_{i2}$) に対する電圧増幅度 $A_d=v_o/v_{i1}$ を求めよ。

(3) 次に、 A_c を低減するために抵抗 R_E を取り除き、定電流源 I を接続した図2の差
動増幅回路の小信号入力に対する入出力特性を考える。

- 1) 同相入力 ($v_{i1}=v_{i2}=v_i$) に対する電圧増幅度 $A_c=v_o/v_i$ を理由を付けて求めよ。
- 2) 逆相入力 ($v_{i1}=-v_{i2}$) に対する電圧増幅度 $A_d=v_o/v_{i1}$ を求めよ。

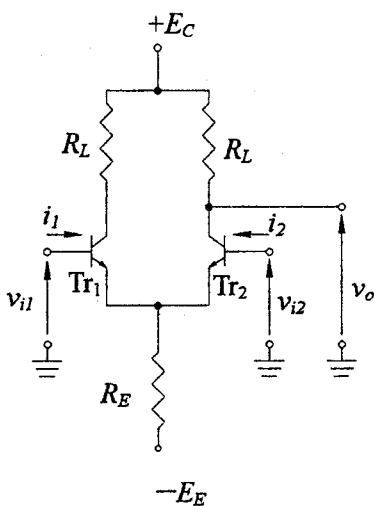


図1

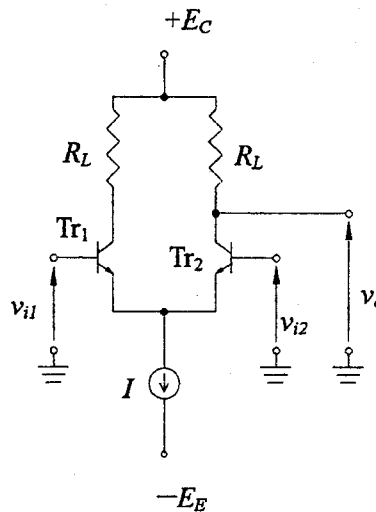


図2

4

光の回折現象は、量子論的な光子の位置と運動量の関係によって説明できる。平面波(光)の回折について、次の間に答えよ。ただし、プランク定数を h とする。

- (1) 光(波長 λ)の運動量の大きさ p を λ を用いて表せ。
- (2) 図1のように、点Pにある粒子に波長 λ の光(平面波)を当て、粒子によって弾性散乱された光がレンズを通りスクリーン上に像を結んでいる場合を考える。このとき、レンズ端を通ってきた散乱光は x 方向の運動量の大きさ $|p_x|$ を持った光ということになる。(1)の結果を使って $|p_x|$ を表せ。ただし、点Pはレンズの中心軸上にあり、点Pにおいてレンズ端と中心軸がなす角は θ である。
- (3) スクリーン上の像から粒子の正確な位置を求めようとした場合、レイリーの定義によれば、回折現象による粒子の位置の拡がりを $\Delta x \approx \lambda / \sin \theta$ 程度で求めることができる。(2)の結果を用いて、 $|p_x|$ と Δx の関係を示せ。
- (4) 図2のようなスリットによる光の回折を考える。 y 方向に運動量 p をもった光(平面波)がスリット(幅を $2a$ とする)に垂直に入射するとする。このとき、(3)の関係式を用いて x 方向の運動量の大きさ p_x の範囲を求めよ。ただし、 x 軸の原点をスリットの中心とする。
- (5) スリットから距離 L のところにあるスクリーン上に到達する光は、回折のために α の角度でスリット幅よりも大きな拡がりをもって分布する。 α を求め、この拡がりの大きさ $2b$ を求めよ。ただし、 α は非常に小さいとする。
- (6) $2b$ を最小にするには、 a をどのように選ばばよいか求めよ。ただし、 L は固定である。

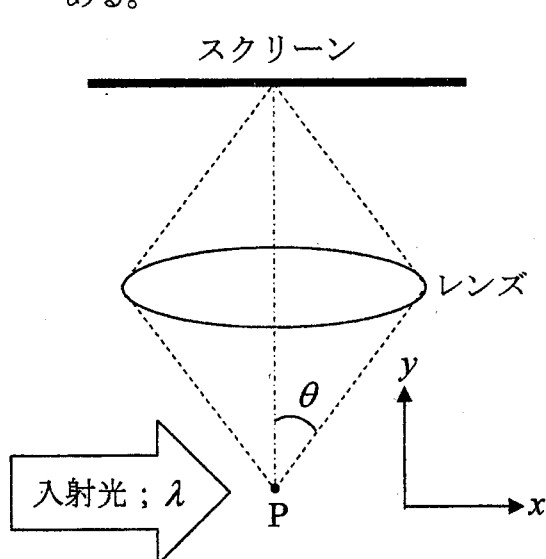


図1

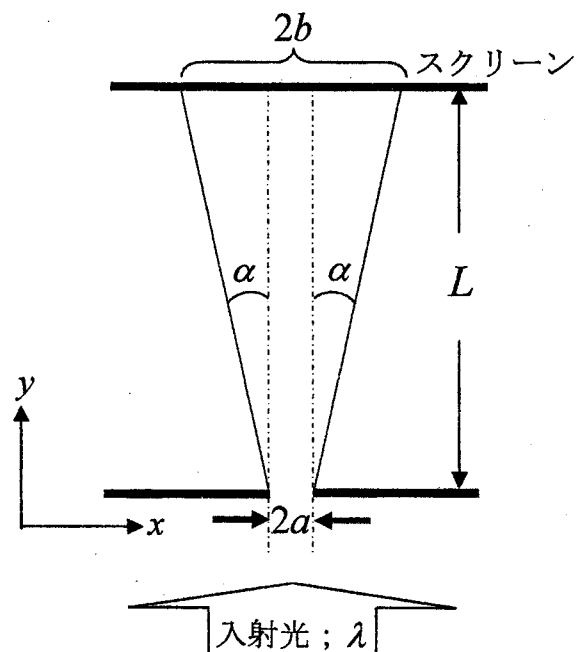


図2

図1は ck をクロック端子とするフリップフロップである。その出力 f の状態遷移表を表1に示す。

このフリップフロップを2個接続した、図2に示す論理回路を考える。各々のクロック端子 ck には同一のクロック信号が入力されている。次の問に答えよ。

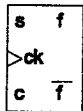


図1: フリップフロップ

表1: 出力 f の状態遷移表

		入力 sc			
		00	01	11	10
現在の	0	0	0	不定	1
状態 f	1	1	0	不定	1

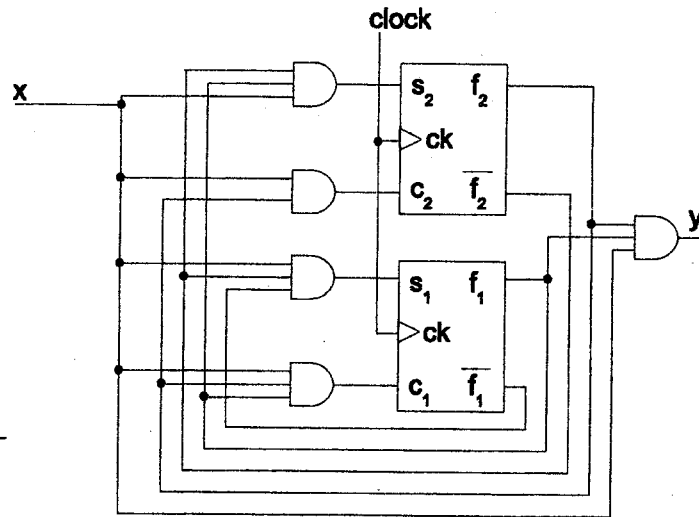


図2: 論理回路

- (1) 図2の y, s_1, c_1, s_2, c_2 の各々を, x, f_1, f_2 を用いた最も簡単な積和論理式として書け。
- (2) 図2の論理回路において, 状態 f_2f_1 の遷移図を書け。ただし, 状態遷移を表す矢印には, その時の入力 x 出力 y を “ x/y ” の形式で付記せよ。
- (3) 問(2)の結果から, 図2の回路の機能を説明せよ。更にその機能の名称を述べよ。なお, 初期状態を $f_2f_1 = 00$ と仮定してよい。
- (4) 問(3)の機能は, 問(1)で求めた y, s_1, c_1, s_2, c_2 の各々の論理式を簡単化することによって, 更に簡単な回路で実現可能である。初期状態を $f_2f_1 = 00$ とし, 問(2)の遷移図で遷移しない状態が存在することを利用して, 問(1)で求めた論理式をカルノー図により簡単化せよ。

6

出力値 $s \in S = \{-1, +1\}$ である 1 重マルコフ情報源がある。この情報源の出力は、一つ前のシンボルの値による条件付き確率で以下のように定まるものとする。

$$P(-1|-1) = 1 - p$$

$$P(+1|-1) = p$$

$$P(-1|+1) = q$$

$$P(+1|+1) = 1 - q$$

ここで p, q は、各々非負で 1 以下の定数である。このとき以下の問いに答えよ。

(1) 定常状態において、この情報源出力が $s = +1$ を出力する確率 P_{+1} を示せ。

(2) 二つの連続する情報源出力の対

$$(s_0, s_1) \in S^2 = \{(-1, -1), (-1, +1), (+1, -1), (+1, +1)\}$$

について、それぞれの出力対の発生確率を示せ。

(3) 以下の定義により 1 重マルコフ情報源のエントロピーを計算せよ。

$$H(S) = - \sum_{s_0 \in S} P(s_0) \sum_{s_1 \in S} P(s_1 | s_0) \log P(s_1 | s_0)$$

(4) $q = p$ とする。このとき、 $H(S)$ を最大にする p を示せ。ただしその導出過程も示すこと。

(5) $q = p$ とする。このとき、(1) で求めた確率 P_{+1} と同じ確率で $s = +1$ を出力し、確率 $1 - P_{+1}$ と同じ確率で $s = -1$ を出力する無記憶情報源のエントロピー $H(\bar{S})$ が $H(S)$ 以上となることを示せ。