$\boxed{8}$

log の底は 2 とする.

(1)

エントロピーの定義に従って計算.

$$H(X)=-\left\{p(x_0)\log p(x_0)+p(x_1)\log p(x_1)\right\}=-\left\{r\log r+(1-r)\log(1-r)\right\}$$

(2)

(1)と同様.

$$\begin{aligned}H(Y)&=-[\{r(1-q)+(1-r)q\}\log\{r(1-q)+(1-r)q\}+\{(1-r)(1-q)+rq\}\log\{(1-r)(1-q)+rq\}]\\&=-\{(r+q-2rq)\log(r+q-2rq)+(1+2rq-r-q)\log(1+2rq-r-q)\}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}H(Y\,|\,X)&=rH(Y\,|\,0)+(1-r)H(Y\,|\,1)\\&=-r\{(1-q)\log(1-q)+q\log q\}-(1-r)\{(1-q)\log(1-q)+q\log q\}\\&=-\{(1-q)\log(1-q)+q\log q\}\end{aligned}$$

より, $H(Y\,|\,X)$ は r に依存しない.

(4)

(3)の結果から, 通信容量を求めるには, $H(Y)$ を最大化する r がわかれば良い（$H(Y\,|\,X)$ は定数扱い）. エントロピーが最大となる条件は, 全ての生起確率が等しいときであるから, 求める r は,

$$r+q-2rq=1+2rq-r-q \quad\Leftrightarrow\quad r=\frac{1}{2}$$

よって,

$$H(Y)_{mac}=-\left(\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}\right)\times 2=1$$

したがって,

$$C=1+(1-q)\log(1-q)+q\log q$$